

УДК: 517.98

Г. А. Саргсян

О собственных функциях, порожденных однородной задачей Неймана, для одного дифференциального пучка

(Представлено академиком А. А. Талаляном 6/VI 2006)

Ключевые слова: смешанная задача, полнота, квадратичный пучок, собственная функция

В работе изучается краевая задача на собственные значения:

$$L_{\lambda}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \lambda^2 \Delta u = 0, \quad (1)$$

$$Gu = \alpha u + \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad (2)$$

где Ω - круг с центром в начале координат, $\partial \Omega$ - единичная окружность, Δ - двумерный оператор Лапласа, n - внешняя нормаль к окружности $\partial \Omega$, $\alpha \geq 0$ - постоянное число. Собственным значением задачи (1), (2) назовем число λ , при котором существует функция u_{λ} , удовлетворяющая (1), (2), отличная от постоянной при $\alpha = 0$ и отличная от тождественного нуля при $\alpha > 0$. В [1] рассмотрена однородная краевая задача Дирихле на собственные значения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \lambda^2 \Delta u = 0, \quad (3)$$

$$u \Big|_{\partial \Omega} = 0 \quad (4)$$

где путем построения рекуррентных формул доказано существование полной системы полиномиальных собственных функций в комплексном соболевском гильбертовом

пространстве $H = \overset{0}{W}_2^1(\Omega) \oplus \overset{0}{W}_2^1(\Omega)$.

В [2] приводится явное представление полной совокупности полиномиальных собственных функций задачи (3), (4) в соболевском пространстве $H = \overset{0}{W}_2^1(\Omega) \oplus \overset{0}{W}_2^1(\Omega)$.

Для построения полной системы решений уравнения (1) удобнее построить системы решений этого уравнения, обращающихся в нуль на границе круга и являющихся полиномами по x, y . В дальнейшем для наших построений и формулировки полученных результатов удобно перейти от действительных x, y к комплексным переменным $z = x + iy, \bar{z} = x - iy$, и использовать комплексные операторы дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Тогда краевую задачу (1), (2) можно записать в комплексной форме

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2} - [\mu_1(\lambda) + \mu_2(\lambda)] \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} + \mu_1(\lambda) \mu_2(\lambda) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (5)$$

$$Gu = \alpha u + z \frac{\partial u}{\partial z} + \bar{z} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad (6)$$

где

$$\mu_1(\lambda) = 1 - 2\lambda i, \quad \mu_2(\lambda) = \frac{1}{1 + 2\lambda i}. \quad (7)$$

Нами установлена двукратная полнота системы полиномиальных собственных функций задачи (1), (2) в гильбертовом пространстве H при $\alpha > 0$; когда же $\alpha = 0$, двукратная полнота собственных функций в соответствующем пространстве уже не имеет места.

Наряду с краевой задачей (5), (6) будем рассматривать следующую спектральную задачу Дирихле:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \bar{z}^2} - [\mu_1(\lambda) + \mu_2(\lambda)] \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \bar{z}} + \mu_1(\lambda) \mu_2(\lambda) \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \quad (8)$$

$$V \Big|_{\partial \Omega} = 0. \quad (9)$$

Легко убедиться, что задача (5), (6) тесно связана с задачей Дирихле (8), (9), а именно, что собственные значения задачи (5), (6) одновременно являются и собственными значениями задачи Дирихле и - наоборот, если $\alpha \neq -1, 1 = 1, 2, 3, \dots$. Обозначим систему полиномиальных решений задачи (8), (9) через

$$V_{\lambda n}(z, \bar{z}), \quad (10)$$

что соответствует собственным значениям λ_n .

Заметим, что система (10) в соболевском пространстве $W_2^1(\Omega)$ является двукратно полной в смысле М. В. Келдыша [3]. Перейдем теперь к решению задачи (5), (6). Она состоит в нахождении функций из класса $C^2(\Omega) \cup C^1(\Omega)$, удовлетворяющих уравнению (5) в круге $\Omega: \{z\bar{z} < 1\}$ и граничным условиям (6) на границе $\partial\Omega: \{z\bar{z} = 1\}$.

В дальнейшем для наших построений существенную роль будут играть следующие полиномы:

$$P_n(z, \bar{z}, \mu) = \sum_{m=1}^{[n/2]} \frac{(-1)^m n C_{n-m-1}^{m-1} \mu^m (z + \mu\bar{z})^{n-2m}}{m}. \quad (11)$$

Приведем две вспомогательные леммы без доказательства, установленные нами в [2], характеризующие свойства полиномов $P_n(z, \bar{z}, \mu)$, которые используются в дальнейшем.

Лемма 1. Полиномы $P_n(z, \bar{z}, \mu)$ при $n = 2, 3, \dots$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$P_{n+1}(z, \bar{z}, \mu) = (z + \mu\bar{z})P_n(z, \bar{z}, \mu) + (z + \mu\bar{z})^{n-1} - \mu P_n(z, \bar{z}, \mu). \quad (12)$$

Лемма 2. Полиномы $P_n(z, \bar{z}, \mu)$ на окружности круга Ω удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$(z + \mu\bar{z})^n + P_n(z, \bar{z}, \mu)|_{z\bar{z}=1} = (z^n + \mu^n \bar{z}^n)|_{z\bar{z}=1}. \quad (13)$$

Общее решение уравнения (5) при любом значении параметра λ имеет вид

$$u(z, \bar{z}) = F_1(z + \mu_1(\lambda)\bar{z}) + F_2(z + \mu_2(\lambda)\bar{z}). \quad (14)$$

Перейдем к построению в явном виде полной совокупности нетривиальных полиномиальных решений краевой задачи (5), (6) при $\alpha > 0$. Легко проверить, что

$$GQ_n(z, \bar{z}, \mu) = P_n(z, \bar{z}, \mu), \quad (15)$$

где

$$Q_n(z, \bar{z}, \mu) = \sum_{m=1}^{[n/2]} \frac{(-1)^m n C_{n-m-1}^{m-1} \mu^m (z + \mu\bar{z})^{n-2m}}{(\alpha + n - 2m)m}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (16)$$

Рассмотрим последовательность функции

$$u_{\lambda_k^n}(z, \bar{z}) = \left[\frac{(z + \mu_1\bar{z})^n}{\alpha + n} + Q_n(z, \bar{z}, \mu_1) \right] - \left[\frac{(z + \mu_2\bar{z})^n}{\alpha + n} + Q_n(z, \bar{z}, \mu_2) \right], \quad (17)$$

где

$$u = u_{\lambda_k^n}, \quad \lambda = \lambda_k^n, \quad \mu_1(\lambda) = \mu_2(\lambda) e^{-\frac{2\pi k i}{n}}, \quad n = 2, 3, \dots, \quad k = 1, 2, \dots, (n-1).$$

Теорема 1. *Функции u , построенные согласно формулам (17), являются системой полиномиальных собственных функций краевой задачи (5), (6), соответствующих собственным значениям λ_k^n , $k = 1, 2, \dots, (n-1)$, $n = 2, 3, \dots$, каждое из которых имеет бесконечную кратность.*

Доказательство. Функция $u_{\lambda_k^n}(z, \bar{z})$ представляет собой сумму двух слагаемых, отмеченных квадратными скобками в формуле (17), первое из которых является функцией от $(z + \mu_1 \bar{z})$, второе - функцией от $(z + \mu_2 \bar{z})$, и поэтому она удовлетворяет уравнению (5). Покажем, что функции $u_{\lambda_k^n}(z, \bar{z})$ удовлетворяют граничному условию (6). В самом деле, на основании леммы 2 и формулы (15) имеем

$$\begin{aligned} G u_{\lambda_k^n}(z, \bar{z}) \Big|_{z\bar{z}=1} &= [(z + \mu_1 \bar{z})^n + P_n(z, \bar{z}, \mu_1)] - [(z + \mu_2 \bar{z})^n + P_n(z, \bar{z}, \mu_2)] \Big|_{z\bar{z}=1} = \\ &= [(z + \mu_1 \bar{z})^n + P_n(z, \bar{z}, \mu_1)] \Big|_{z\bar{z}=1} - [(z + \mu_2 \bar{z})^n + P_n(z, \bar{z}, \mu_2)] \Big|_{z\bar{z}=1} = \\ &= (z^n + \mu_1^n \bar{z}^n) \Big|_{z\bar{z}=1} - (z^n + \mu_2^n \bar{z}^n) \Big|_{z\bar{z}=1} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Собственные значения краевой задачи (5), (6) являются бесконечно кратными. Этот факт следует из того, что $\lambda_k^n = \lambda_{kp}^{np}$ при любом натуральном P и что собственные функции $u_{\lambda_k^n}(z, \bar{z})$, соответствующие собственному значению λ_k^n , как полиномы различных порядков линейно независимы. Теорема доказана.

Теорема 2. *Совокупность полиномиальных собственных функций (17) задач (5), (6) образует двукратно полную систему в гильбертовом пространстве $\overset{0}{W}_2^1(\Omega)$*

Доказательство. Известно, что система векторов

$$\left\{ V_{\lambda_v} = \begin{pmatrix} V_{\lambda_v} \\ \lambda_v \cdot V_{\lambda_v} \end{pmatrix} \right\}_{v=1}^{\infty} \quad (19)$$

образует полную систему в ортогональной сумме гильбертовых пространств $H = \overset{0}{W}_2^1(\Omega) \oplus \overset{0}{W}_2^1(\Omega)$. Так как

$$G u_{\lambda_v} = V_{\lambda_v}, \quad (20)$$

положим

$$\hat{G}\hat{u}_{\lambda\nu} = \begin{pmatrix} Gu_{\lambda\nu} \\ \lambda_\nu \cdot Gu_{\lambda\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{\lambda\nu} \\ \lambda_\nu \cdot V_{\lambda\nu} \end{pmatrix} = \hat{V}_{\lambda\nu}. \quad (21)$$

Пусть $\hat{W} \in H$ - произвольная вектор-функция с полиномиальными компонентами

$$\hat{W} = \begin{pmatrix} (1 - z\bar{z}^2) \cdot p(z, \bar{z}) \\ (1 - z\bar{z})^2 \cdot q(z, \bar{z}) \end{pmatrix}, \quad (22)$$

где p и q произвольные полиномы от z и $\bar{z}$. Тогда очевидно, что $G\hat{W} \in H$. Но, как показано в [4], вектор-функцию $G\hat{W}(z, \bar{z})$ можно представить в виде конечной комбинации собственных векторов $V_{\lambda\nu}$

$$\hat{G}\hat{W} = \sum_\nu a_\nu \hat{V}_{\lambda\nu} = \begin{pmatrix} \sum_\nu a_\nu V_{\lambda\nu} \\ \sum_\nu \lambda_\nu a_\nu V_{\lambda\nu} \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Из (21) и (18) имеем

$$\hat{G}\hat{W} = \sum_\nu a_\nu \hat{G}u_{\lambda\nu} = G \sum_\nu a_\nu \hat{u}_{\lambda\nu}. \quad (24)$$

В силу существования обратного оператора G^{-1} из (23) заключаем

$$\hat{W} = \sum_\nu a_\nu \hat{u}_{\lambda\nu}. \quad (25)$$

Но поскольку, как это показано в работе [4], множество полиномиальных векторов вида (22) всюду плотно в гильбертовом пространстве H , то теорема доказана.

Отметим, что полученные нами собственные значения расположены всюду плотно на кривой $|4\lambda^2 + 1| = 1$ в комплексной плоскости. Ясно, что для всякого собственного значения задачи Дирихле существуют собственные функции, которые исчезают в начале координат. Таким образом, в случае $\alpha > 0$ каждой собственной функции задачи Дирихле соответствует одна собственная функция (5), (6).

Рассуждая аналогично, легко получить собственные функции уравнения

$$\lambda^2 Lu + \lambda Nu + Mu = 0, \quad (26)$$

если L, N, M - линейные дифференциальные операторы второго порядка с постоянными коэффициентами, содержащие лишь вторые производные по x и y , причем тип уравнения (26) не играет роли.

Замечание. В случае $\alpha = 0$, т.е. задачи Неймана, оператор G принимает вид

$$G = z \frac{\partial}{\partial z} + \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}. \quad (27)$$

Этот оператор в пространстве всех полиномов не имеет обратного G^{-1} . Очевидно, что если задача Неймана имеет решение для некоторого λ , то соответствующее этому решению решение задачи Дирихле удовлетворяет условию $u(0,0) = 0$. В этом случае оператор G^{-1} можно применить на тех полиномах, которые обращаются в нуль в начале координат. Здесь уже те функции из систем $\{u_{\lambda_k}\}$, которые не исчезают в центре координат, не пригодны для наших целей. Таким образом, система полиномиальных собственных функций задачи Неймана не образует двукратно полную систему в гильбертовом пространстве $W_2^0(\Omega)$. Если $\alpha > 0$, то построенная совокупность полиномиальных собственных функций образует полную систему в $H = W_2^0(\Omega) \oplus W_2^1(\Omega)$, а при $\alpha = 0$ (задача Неймана) полнота нарушается.

Военный авиационный институт им. маршала А. Ханферянца

Литература

1. Зеленьяк Т. И. - ДАН СССР. 1964. Т. 158. №6. С. 1268-1270.
2. Саргсян Г. А. - Уч. зап. ЕГУ. 1994. №1 (180). С. 19-25.
3. Крейн М. Г., Лангер Г. К. - Тр. Междунар. симп. по применению т.ф.к.п. в механике сплошной среды. М. Наука. 1965.
4. Вирабян Г. В. - ДАН АрмССР. 1969. Т. 48. №2. С. 65-70.

Գ. Ա. Սարգսյան

**Մի դիֆերենցիալ փնջի համար Նեյմանի համասեռ խնդրով ծնված
սեփական ֆունկցիաների մասին**

Աշխատանքում կոորդինատների սկզբնակետը կենտրոն ունեցող միավոր շրջանում ուսումնասիրվում է (1)-(2) եզրային խնդիրը: Բացահայտ տեսքով կառուցվում է այդ խնդրի բազմանդամային սեփական ֆունկցիաների համախումբը՝ համապատասխան սեփական արժեքների: Ապացուցվում է, որ երբ $\alpha > 0$, ապա բազմանդամային սեփական ֆունկցիաների համախմբությունը կազմում է լրիվ համակարգ $H = \overset{0}{W}_2^1(\Omega) \oplus \overset{0}{W}_2^1(\Omega)$ - ում, իսկ սահմանային դեպքում, երբ $\alpha = 0$, լրիվությունը խախտվում է:

G. A. Sargsyan

**On Eigenfunctions Generated by Homogeneous Neyman
Problem for Differential Bundle**

The boundary-value problem (1)-(2) in the unit disk centered in the origin is studied. For the problem in explicit form a system of polynomial eigen functions corresponding to the polynomial eigenvalues is constructed. We prove that these functions for $\alpha > 0$ compose a complete system in $H = \overset{0}{W}_2^1(\Omega) \oplus \overset{0}{W}_2^1(\Omega)$, while in the limit case $\alpha = 0$ the completeness is not valid.