

Р. М. Киракосян

О поправочных коэффициентах, учитывающих влияние распределения касательных напряжений по толщине пластинки

(Представлено академиком С. А. Амбарцумяном 5/VI 2006)

Ключевые слова: поправочные коэффициенты, касательные поверхностные нагрузки, пластинка, сдвиг, линейный

Показано, что если теория пластин строится на основе гипотез только для перемещений, то существуют поправочные коэффициенты k_x, k_y , учитывающие влияние распределения касательных напряжений τ_{xz}, τ_{yz} по толщине пластинки. Если же теория пластин опирается на гипотезы для касательных напряжений τ_{xz}, τ_{yz} (например [1]), то законы распределения этих напряжений непосредственно участвуют в построении теории и необходимость введения поправочных коэффициентов автоматически отпадает.

1. Гипотезы теории [2] „... отличаются от современной формы гипотез Кирхгофа только тем, что не требуют ортогональности нормального элемента пластинки к ее изогнутой срединной плоскости...” При построении этой теории считается, что нормальные элементы пластинки недеформируемы, в силу чего их поведение не зависит от закона распределения касательных напряжений τ_{xz}, τ_{yz} по толщине пластинки и определяется только их равнодействующими, т.е. поперечными, силами Q_x, Q_y . Это приводит к утверждению о том, что поправочные коэффициенты, традиционно вводимые для учета влияния распределения напряжений τ_{xz}, τ_{yz} по толщине пластинки, существовать не могут. Отметим, что недеформируемость нормальных элементов аргументируется только тем, что согласно принятым гипотезам длина этих элементов при изгибе пластинки не изменяется. Причем это отождествляется с игнорированием деформации e_z . Однако согласно закону Гука даже в случае материалов, имеющих лишь одну плоскость упругой симметрии, параллельную срединной плоскости пластинки, деформация e_z не зависит от касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} [1]. В силу этого игнорирование e_z не может быть основанием для неучета влияния распределения этих напряжений по толщине пластинки. Кроме того, если считается, что перемещение

$$u_z(x, y, z) = w(x, y) + \int_0^z e_z dz, \quad (1.1)$$

нормальное к срединной плоскости, по толщине пластинки не изменяется, то игнорируется не сама деформация e_z , а ее интеграл по z . Этот интеграл мал из-за малости не e_z , а промежутка интегрирования, поскольку $|z| \leq h/2$, а толщина пластинки h намного меньше ее планарных

размеров.

Покажем, что e_z может быть по модулю больше деформаций e_x и e_y . С этой целью рассмотрим изотропную квадратную пластинку постоянной толщины, которая при одинаковых условиях по всему контуру несет равномерно распределенную поперечную нагрузку. Во всех точках диагональных сечений пластинки $y = \pm x$, которые симметрично расположены относительно оси z , имеет место равенство

$$e_x = e_y. \quad (1.2)$$

При несжимаемости материала

$$e_x + e_y + e_z = 0 \Rightarrow e_z = -2e_x = -2e_y, \quad (1.3)$$

т.е. в отмеченных точках, e_z в два раза по модулю больше e_x и e_y . Однако и в этом случае допущение о неизменности перемещения u_z по толщине пластинки вполне приемлемо. Конечно, реальные материалы не являются идеально несжимаемыми. Но тогда e_z будет больше e_x и e_y не в два раза, а, скажем, в полтора, т.е. будет снова неигнорируемой.

Дополнительно отметим, что если в теории пластин на самом деле считать $e_z = 0$, то можно будет определить напряжение σ_z непосредственно из закона Гука. Для изотропных пластин это приведет к выражению

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y), \quad (1.4)$$

что не соответствует действительности. (Здесь ν - коэффициент Пуассона материала). Поэтому σ_z определяют интегрированием третьего дифференциального уравнения равновесия сплошной среды с использованием условий на поверхностях пластинки.

Разумеется, только неизменность длины нормальных элементов недостаточна для того, чтобы считать их недеформируемыми - это может быть, например, следствием знакопеременности e_z по толщине пластинки. А то, что после изгиба первоначально нормальные элементы пластинки больше не перпендикулярны к ее срединной поверхности, свидетельствует об изменении прямых углов, т.е. о наличии деформаций поперечных сдвигов. Следовательно, нормальные элементы деформируемы, как минимум, в смысле поперечных сдвигов.

При построении теории [2] искривленные от неоднородных поперечных сдвигов первоначально нормальные элементы просто аппроксимируются прямыми элементами, которые не перпендикулярны к срединной поверхности изогнутой пластинки. Углы наклона аппроксимирующих прямых элементов как раз и зависят от формы распределения касательных напряжений τ_{xz} , τ_{yz} по толщине пластинки. Следовательно, нормальные элементы деформируемы, в силу чего поправочные коэффициенты, традиционно вводимые для учета влияния распределения τ_{xz} , τ_{yz} по толщине пластинки ([3-5] и др.), существуют. Вопрос в другом - учитывать это обстоятельство или нет?

2. Рассмотрим пластинку-полосу постоянной толщины h и ширины l . Координатную плоскость $хоу$ совместим со срединной плоскостью. Ось $оу$ направим вдоль одной из длинных сторон, ось $оз$ -

вертикально вниз. Пусть поверхностные нагрузки и условия на краях таковы, что все расчетные величины пластинки-полосы не зависят от координаты y .

Будем считать, что нормальные элементы пластинки-полосы после деформирования остаются прямолинейными. Это влечет за собой линейное распределение напряжений σ_x , σ_y и τ_{xy} по толщине. Тогда согласно первому дифференциальному уравнению равновесия сплошной среды касательное напряжение τ_{xz} вдоль толщины пластинки-полосы будет изменяться по закону квадратной параболы. Имея в виду это обстоятельство и удовлетворяя условиям на поверхностях $z = \pm h/2$, получим

$$\tau_{xz} = \frac{3Q}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) - \frac{X_1}{2} \left(1 - \frac{12z^2}{h^2} \right) + \frac{z}{h} X_2. \quad (2.1)$$

Здесь Q - поперечная сила,

$$X_1 = \frac{X^+ - X^-}{2}, \quad X_2 = X^+ + X^-. \quad (2.2)$$

Через $X^\pm$ обозначены проекции интенсивностей поверхностных нагрузок на ось x . Знаки „+” и „-” относятся к поверхностям $z = +h/2$ и $z = -h/2$ соответственно.

Пользуясь принципом возможной работы и методом единичной силы, для прогиба некоторой точки пластинки-полосы w можно написать [4]

$$w = \int_0^1 \frac{M \cdot M_1}{D_{11}} dx + \int_0^1 \left(\int_{-h/2}^{h/2} \gamma_{xz} \cdot \tau_{xz}^{(1)} dz \right) dx. \quad (2.3)$$

Здесь D_{11} - цилиндрическая жесткость на изгиб, M и γ_{xz} - изгибающий момент и деформация поперечного сдвига от реально действующих нагрузок, M_1 и $\tau_{xz}^{(1)}$ - изгибающий момент и касательное напряжение от той единичной силы, которую следует представить нормально приложенной в той точке пластинки-полосы, для которой определяется прогиб.

Очевидно, что

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{B_{55}}, \quad \tau_{xz}^{(1)} = \frac{3Q_1}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right), \quad (2.4)$$

где B_{55} - модуль сдвига материала в плоскости xoz , Q_1 - поперечная сила от единичной силы.

С учетом (2.1) и (2.4) выражение (2.3) можно представить в виде

$$w = \int_0^1 \frac{M \cdot M_1}{D_{11}} dx + \int_0^1 \frac{kQQ_1}{B_{55}h} dx, \quad k = \frac{6}{5} - \frac{X_1 h}{5Q}, \quad (2.5)$$

где k - поправочный коэффициент, учитывающий влияние распределения касательного напряжения τ_{xz} по толщине пластинки-полосы. Отрицать существование этого коэффициента равносильно отрицанию принципа возможной работы, метода единичной силы и неравномерности распределения напряжения τ_{xz} по толщине пластинки.

Заметим, что выражение (2.6) означает линейную зависимость между значениями поперечной силы Q и приведенного поперечного сдвига сечения пластинки-полосы γ :

$$\gamma = -\frac{6}{5} \frac{Q}{B_{55}h} - \frac{X_1}{5B_{55}}, \quad Q = -\frac{5}{6} B_{55}h\gamma + \frac{X_1h}{6}. \quad (2.6)$$

3. Рассмотрим пример. Пусть на пластинку-полосу, шарнирно опертую вдоль длинных сторон, совместно действуют равномерно распределенная нормальная и по линейному закону переменные распределенные касательные поверхностные нагрузки (рисунок):

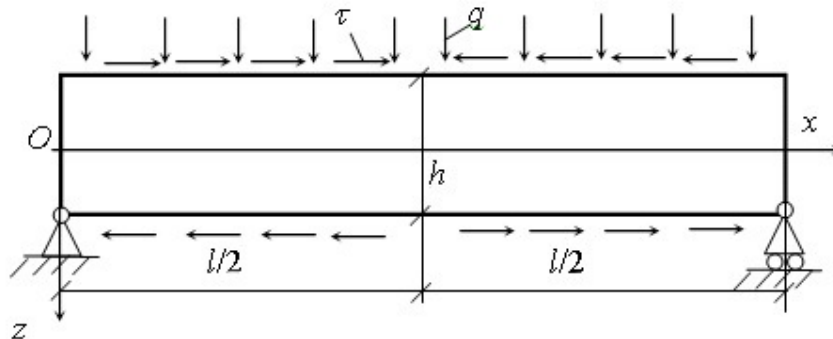
$$q = \text{const}, \quad X^+ = -\tau(1 - 2x), \quad X^- = \tau(1 - 2x), \quad (X_1 = -\tau(1 - 2x), \quad X_2 = 0). \quad (3.1)$$

Не вдаваясь в подробности, приведем выражения прогиба и его максимального значения по теориям [2] и [1]:

а) по теории [2]

$$w = \frac{q + 2\tau h}{24D_{11}} x(l^3 - 2lx^2 + x^3) + \frac{q}{2B_{55}h} x(1 - x), \quad (3.2)$$

$$w_{\max} = w|_{x=l/2} = \frac{5(q + 2\tau h)}{384D_{11}} l^4 \left(1 + \frac{4}{5} \frac{q}{q + 2\tau h} \frac{B_{11}}{B_{55}} \frac{h^2}{l^2} \right); \quad (3.3)$$



б) по теории [1]

$$w = \frac{q + 2\tau h}{24D_{11}} x(l^3 - 2lx^2 + x^3) + \frac{3q + \tau h}{5B_{55}h} x(1 - x), \quad (3.4)$$

$$w_{\max} = w|_{x=[l/2]} = \frac{5(q + 2\tau h)}{384D_{11}} l^4 \left(1 + \frac{8}{25} \frac{3q + \tau h}{q + 2\tau h} \frac{B_{11}}{B_{55}} \frac{h^2}{l^2} \right). \quad (3.5)$$

Напомним, что теория [2] не учитывает влияние распределения напряжения τ_{xz} по толщине пластинки, а теория [1] это влияние учитывает.

Интересно отметить, что результаты теории [1] совпадают с соответствующими результатами, полученными по принципу виртуальной работы и методу единичной силы [4].

Внутри скобок формул максимального прогиба число „1” относится к теории Кирхгофа, а вторые слагаемые - к поправкам. Поправку, полученную с учетом влияния распределения напряжения τ_{xz} по толщине пластинки-полосы, обозначим через Δ_k , а без его учета - через Δ . Отношение этих поправок составляет

$$\frac{\Delta_k}{\Delta} = \frac{1}{1} \int_0^1 k dx. \quad (3.6)$$

Из (2.1) видно, что при совместном действии нормальной и касательных нагрузок касательное напряжение τ_{xz} состоит из трех слагаемых. К задаче изгиба относятся первые два слагаемых. Они имеют квадратичные распределения по толщине. Очевидно, что влияние деформации поперечного сдвига - это суммарное влияние этих двух слагаемых. Первое из них прямо пропорционально поперечной силе Q , а второе - параметру касательных поверхностных нагрузок X_1 . Первое слагаемое является знакопостоянной функцией поперечной координаты z и его интеграл по толщине пластинки-полосы равен поперечной силе Q . Второе же слагаемое знакопеременное и его интеграл по толщине равен нулю. Несмотря на это вклад второго слагаемого в значение прогибов пластинки-полосы все же отличен от нуля. В рассмотренном примере этот вклад для максимального прогиба составляет

$$-\int_0^l dx \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{3Q_1}{2B_{55}h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) \frac{X_1}{2} \left(1 - \frac{12z^2}{h^2} \right) \right] dz = \frac{\tau l^2}{20B_{55}}. \quad (3.7)$$

В таблице представлены значения поправок и их отношения для некоторых видов нагрузок.

	Δ_k	Δ	Δ_k/Δ
$q \neq 0, \tau = 0$	$[24/25][(B_{11})/(B_{55})][(h^2)/(l^2)]$	$[4/5][(B_{11})/(B_{55})][(h^2)/(l^2)]$	$[6/5]$
$q = 0, \tau \neq 0$	$[4/25][(B_{11})/(B_{55})][(h^2)/(l^2)]$	0	-
$[q/(\tau h)] = \alpha$	$[8/25][(3\alpha+1)/(\alpha+2)][(B_{11})/(B_{55})][(h^2)/(l^2)]$	$[4/5][(\alpha)/(\alpha+2)][(B_{11})/(B_{55})][(h^2)/(l^2)]$	$[6/5]+[2/(5\alpha)]$

Таким образом, влияние деформации поперечного сдвига обусловлено четырьмя факторами: величинами Q, X_1 и формами распределения соответствующих слагаемых касательного напряжения. В рассмотренном примере теория [2] из этих четырех факторов учитывает только один - величину поперечной силы. Поэтому теорию [2] следует назвать теорией, учитывающей влияние не деформаций поперечных сдвигов, а только поперечных сил. В случае отсутствия поперечных сил результаты теории [2] будут совпадать с соответствующими классическими результатами. Такая ситуация имеет место в рассмотренном примере, когда на пластинку-полосу действуют только касательные поверхностные силы ($q = 0, \tau \neq 0$). В этом случае поперечная сила Q всюду равна нулю и, как видно из таблицы, поправка теории [2] отсутствует ($\Delta = 0$). В отличие от этого теория [1], а также принцип возможной работы и метод единичной силы, при которых учитываются влияния всех четырех вышеотмеченных факторов, для этого же случая дают поправку

$$\Delta_k = \frac{4}{25} \frac{B_{11}}{B_{55}} \frac{h^2}{l^2}. \quad (3.8)$$

Для толстых пластин-полос, изготовленных из современных анизотропных материалов, эта поправка может оказаться существенной. Например, при $h/l = 1/5$ и $B_{11}/B_{55} = 40$ [1]

$$\Delta_k = 25.6\%. \quad (3.9)$$

Институт механики НАН РА

Литература

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. М. Наука. 1987. 360 с.
2. Васильев В. В. - Изв. АН МТТ. 1998. №3. С. 46-58.
3. Reissner E. - Trans. ASME. 1945. V. 67. P. A69-A77.
4. Тимошенко С.П., Гере Дж. Механика материалов. М. Мир. 1976. 669 с.
5. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Теория оболочек переменной жесткости. Киев. Наукова думка. 1981. 544 с.

Ռ. Մ. Կիրակոսյան

**Սալի հաստությամբ շոշափող լարումների բաշխման ազդեցությունը հաշվի
առնող ուղղիչ գործակիցների մասին**

Ցույց է տրվում, որ եթե սալերի տեսությունը կառուցվում է միայն տեղափոխությունների վրա դրվող վարկածներով, ապա ի հայտ են գալիս k_x և k_y ուղղիչ գործակիցներ, որոնք հաշվի են առնում սալի հաստությամբ τ_{xz} և τ_{yz} շոշափող լարումների փոփոխման ազդեցությունը: Մակերևութային շոշափող բեռների առկայության դեպքում k_x և k_y գործակիցների արտահայտությունները պարունակում են այդ բեռների ինտենսիվությունները, որի հետևանքով լայնական ուժերի և բերված սահքերի կապը, մնալով գծային, դադարում է ուղիղ համեմատական լինելուց:

R. M. Kirakosyan

**On the Corrective Coefficients which Take into Account the Influence of Tangential
Stresses Distribution along the Plate Thickness**

It is shown that the corrective coefficients k_x , k_y which take into account the influence of tangential stresses distribution along the plate thickness exist, when the theory of plates is build by hypothesis only for displacement.

In the case of tangential surface loading action the expression of coefficients k_x , k_y contents the intensity of this loading, and because of it the relations between transversal force and corresponding shears which remain lineary, are stopped to be directly proportional.