ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том 106 2006 № 2

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ

УДК 539.3:537.228.1

А. М. Саргсян

О решении краевых задач электроупругости для клиновидных областей

(Представлено академиком Л.А. Агаловяном 6/VII 2005)

Ключевые слова: *электроупругость, особенности напряжений и электрической индукции, функции напряжений и электрической индукции*

В работах [1-4] при помощи местного решения исследовано поведение связанного электроупругого поля в окрестности угловой точки тонкого пьезоэлектрического клина, на границах которого заданы разнообразные электромеханические условия. Выявлено влияние электромеханических граничных условий на поведение напряжений вблизи вершины клина.

Представляя решение уравнений равновесия в перемещениях в виде интегралов Меллина, в работах [5, 6] получены решения плоской задачи электроупругости для пьезокерамического клина (трансверсально-изотропное тело) при двух конкретных граничных условиях.

В настоящей работе с применением прямого и обратного обобщенного преобразования Меллина строится решение краевых задач электроупругости для тонкого пьезоэлектрического клина, обладающего прямолинейной анизотропией общего вида. На границах клина заданы соответствующие электромеханические условия. Исследуется степень сингулярности электроупругого поля вблизи вершины клина.

О возможности применения обобщенного преобразования Меллина при решении краевых задач электроупругости было упомянуто еще в работе [3]. Предполагается, что вырезанный из пьезоэлектрического кристалла клин в каждой точке имеет плоскость материальной симметрии, параллельную его срединной плоскости. Начало декартовой x, y, z и полярной r, θ, z систем координат находится в угловой точке срединной плоскости клина, ось z направлена нормально к этой плоскости.

Здесь, как и в работах [1-4], за основные неизвестные принимаются функции напряжения $\varphi(x,y)$ и электрической индукции $\psi(x,y)$, которые при отсутствии объемных сил и электрических зарядов удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$4\pi L_4\varphi(x,y) - L_3\psi(x,y) = 0, \quad L_3\varphi(x,y) + L_2\psi(x,y) = 0. \tag{1}$$

Функции $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ в отдельности удовлетворяют также дифференциальному уравнению шестого порядка

$$(4\pi L_4 L_2 + L_3^2)\varphi(x,y) = 0, \tag{2}$$

характеристическое уравнение которого имеет вид [7]

$$4\pi l_4(\mu)l_2(\mu) + l_3^2(\mu) = 0. \tag{2'}$$

В уравнениях (1) и (2)

$$\begin{aligned}
L_4 &= s_{22}\frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2s_{26}\frac{\partial^4}{\partial x^3\partial y} + (2s_{12}+s_{66})\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} - 2s_{16}\frac{\partial^4}{\partial x\partial y^3} + s_{11}\frac{\partial^4}{\partial y^4},\\
L_3 &= -g_{22}\frac{\partial^3}{\partial x^3} + (g_{12}+g_{26})\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y} - (g_{21}+g_{16})\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2} + g_{11}\frac{\partial^3}{\partial y^3},\\
L_2 &= \eta_{22}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\eta_{12}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + \eta_{11}\frac{\partial^2}{\partial y^2},
\end{aligned}$$

$s_{22},\dots$ - коэффициенты упругости при постоянной электрической индукции, $\eta_{22},\dots$ - коэффициенты диэлектрической восприимчивости при постоянных механических напряжениях, $g_{22},\dots$ - пьезоэлектрические модули.

Полиномы $l_k(\mu)$ $(k = 2,3,4)$ получаются из L_k заменой $\partial^k/\partial x^k$ на единицу, а $\partial^k/\partial y^k$ - на μ^k.

Напряжения и компоненты вектора электрической индукции выражаются через функции $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}, \quad D_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad D_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{3}$$

Общее решение уравнения (2), как известно, записывается в виде [7, 8]

$$\varphi(x,y) = \sum_{j=1}^{6}\gamma_j\varphi_j(x+\mu_j y) = \sum_{j=1}^{6}\gamma_j\varphi_j(z_j), \tag{4}$$

где $\varphi_j(z_j)$ - аналитические функции своих аргументов, μ_j - неравные между собою корни характеристического уравнения (2′)

$$\begin{aligned}
&\mu_j = \sigma_j + i\nu_j \qquad (j = 1,2,\dots,6),\\
&\mu_4 = \bar\mu_1, \quad \mu_5 = \bar\mu_2, \quad \mu_6 = \bar\mu_3,
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\gamma_j = \begin{cases} 1, & (j = 1, 2, 4, 5) \\ l_3(\mu_j)/4\pi l_4(\mu_j), & (j = 3, 6). \end{cases} \tag{6}$$

Так как функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ удовлетворяют также уравнениям (1), то между ними существует связь

$$\psi(x, y) = \sum_{j=1}^{6} \gamma_j f_j \varphi_j'(x + \mu_j y) = \sum_{j=1}^{6} \gamma_j f_j \varphi_j'(z_j), \tag{7}$$

где штрихом обозначена производная по обобщенному комплексному аргументу $z_j = x + \mu_j y$,

$$f_j = -l_3(\mu_j)/l_2(\mu_j) \quad (j = 1, 2, \ldots, 6). \tag{8}$$

В дальнейшем принимается, что корни характеристического уравнения (5) не являются одновременно корнями уравнений $l_k(\mu) = 0$ $(k = 2, 3, 4)$.

На границе клина $\theta = 0$ могут быть заданы три произвольных непротиворечивых условия из выписанных ниже шести условий:

$$\begin{aligned} &\sigma_\theta(r, 0) = \sigma_0(r), \quad \tau_{r\theta}(r, 0) = \tau_0(r), \\ &u_r(r, 0) = u_0(r), \quad u_\theta(r, 0) = \nu_0(r), \\ &V(r, 0) = V_0(r), \quad D_\theta(r, 0) = D_0(r). \end{aligned} \tag{9}$$

Такие же условия задаются и на границе $\theta = \theta_1$ с соответствующим изменением индексаций.

В условиях (9) $V(r, \theta)$ - потенциал электрического поля, $u_r(r, \theta)$ и $u_\theta(r, \theta)$ - упругие перемещения.

Из (1)-(8) следует, что при отсутствии пьезоэффекта система (1) распадается на два независимых уравнения: одно для $\varphi(x, y)$, другое для $\psi(x, y)$.

Учитывая (3), а также уравнения состояния и условие потенциальности электрического поля, в полярной системе координат имеем

$$\begin{aligned} &\sigma_r = \sum_{j=1}^{6} \gamma_j b_j^2(\theta) \varphi_j''(z_j), & &\sigma_\theta = \sum_{j=1}^{6} \gamma_j a_j^2(\theta) \varphi_j''(z_j), \\ &\tau_{r\theta} = -\sum_{j=1}^{6} \gamma_j a_j(\theta) b_j(\theta) \varphi_j''(z_j), & &\frac{\partial u_r}{\partial r} = \sum_{j=1}^{6} \gamma_j a_j(\theta) c_j(\theta) \varphi_j''(z_j), \\ &\frac{\partial u_\theta}{\partial r} = \sum_{j=1}^{6} \gamma_j a_j(\theta) d_j(\theta) \varphi_j''(z_j), & &\frac{\partial V}{\partial r} = \sum_{j=1}^{6} \gamma_j a_j(\theta) m_j \varphi_j''(z_j), \\ &D_\theta = -\sum_{j=1}^{6} \gamma_j a_j(\theta) f_j \varphi_j''(z_j), & &D_r = \sum_{j=1}^{6} \gamma_j b_j(\theta) f_j \varphi_j''(z_j), \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$a_j(\theta) = \cos\theta + \mu_j \sin\theta, \qquad b_j(\theta) = -\sin\theta + \mu_j \cos\theta,$$

$$M_j = s_{11}\mu_j^2 - s_{16}\mu_j + s_{12} - f_j(g_{11}\mu_j - g_{21})/4\pi,$$

$$N_j = s_{12}\mu_j - s_{26} + s_{22}\mu_j^{-1} - f_j(g_{12} - g_{22}\mu_j^{-1})/4\pi,$$

$$m_j = g_{11}\mu_j^2 - g_{16}\mu_j + g_{12} + f_j(\eta_{11}\mu_j - \eta_{12}),$$

$$c_j(\theta) = M_j\cos\theta + N_j\sin\theta, \qquad d_j(\theta) = N_j\cos\theta - M_j\sin\theta.$$

Для решения краевых задач (1)-(9) используется обобщенное интегральное преобразование Меллина аналитической функции $f(z) = f(x + \mu y)$ (μ - некоторая комплексная константа), впервые, по-видимому, введенное в работах [9, 10], где исследована сингулярность напряжений в составном произвольно-анизотропном теле, находящемся в состоянии обобщенной плоской деформации (в частности плоское деформированное или обобщенное плоское напряженное состояние)

$$\langle f(z)\rangle = \int\limits_0^\infty f(z)r^{s-1}dr = a^{-s}(\theta)\bar f(s),$$

$$a(\theta) = \cos\theta + \mu\sin\theta, \qquad \bar f(s) = \int\limits_0^\infty f(z)z^{s-1}dz,$$

$$f(z) = \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \langle f(z)\rangle r^{-s}ds.$$

Если $f(z)$ аналитична в некотором секторе $\theta_0 < \theta < \theta_*$, $0 < r \le \infty$ и $f(z) = O(r^\xi)$ при $r \to 0$, $f(z) = O(r^\eta)$ при $r \to \infty$, то $\bar f(s)$ существует в полосе $-\xi < c < -\eta$ и не зависит от θ в заданном секторе.

Будем искать решение (1)-(9), удовлетворяющее следующим условиям: $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}, D_r, D_\theta, \partial u_r/\partial r$ и $\partial u_\theta/\partial r$ при $r \to 0$ имеют порядок $O(r^{-1+\alpha})$, а при $r \to \infty$ исчезают как $O(r^{-1-\beta})$, где $\alpha > 0$, $\beta \ge 0$. Тогда в полосе $1 - \alpha < \operatorname{Re} s < 1 + \beta$ существует преобразование Меллина.

Применяя обобщенное интегральное преобразование Меллина к выражениям (10), получим

$$\begin{aligned}
&\langle\sigma_r\rangle = \sum_{j=1}^{6}\gamma_j b_j^2(\theta)a_j^{-s}(\theta)\bar\varphi_j(s), && \langle\sigma_\theta\rangle = \sum_{j=1}^{6}\gamma_j a_j^2(\theta)a_j^{-s}(\theta)\bar\varphi_j(s),\\
&\langle\tau_{r\theta}\rangle = -\sum_{j=1}^{6}\gamma_j a_j(\theta)b_j(\theta)a_j^{-s}(\theta)\bar\varphi_j(s), && \left\langle\frac{\partial u_r}{\partial r}\right\rangle = \sum_{j=1}^{6}\gamma_j a_j(\theta)c_j(\theta)a_j^{-s}(\theta)\bar\varphi_j(s),\\
&\left\langle\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right\rangle = \sum_{j=1}^{6}\gamma_j a_j(\theta)d_j(\theta)a_j^{-s}(\theta)\bar\varphi_j(s), && \left\langle\frac{\partial V}{\partial r}\right\rangle = \sum_{j=1}^{6}\gamma_j a_j(\theta)m_j a_j^{-s}(\theta)\bar\varphi_j(s),\\
&\langle D_\theta\rangle = -\sum_{j=1}^{6}\gamma_j a_j(\theta)f_j a_j^{-s}(\theta)\bar\varphi_j(s), && \langle D_r\rangle = \sum_{j=1}^{6}\gamma_j b_j(\theta)f_j a_j^{-s}(\theta)\bar\varphi_j(s),
\end{aligned} \qquad (10')$$

$$\bar\varphi_j(s) = \int\limits_0^\infty \varphi_j''(z_j)z_j^{s-1}dz_j.$$

Удовлетворяя преобразованным граничным условиям, в каждом конкретном случае получим систему алгебраических уравнений относительно $\bar{\varphi}_j(s)$

$$\sum_{j=1}^{6} B_{ij}\bar{\varphi}_j(s) = T_l(s), \qquad (l = 1, 2, \ldots, 6), \tag{11}$$

где под $T_l(s)$ подразумеваются преобразования соответствующих граничных условий. Коэффициенты B_{ij} зависят от вида граничных условий.

Определяя $\bar{\varphi}_j(s)$ из (11)

$$\bar{\varphi}_j(s) = \sum_{l=1}^{6} T_l(s) A_{lj} \Delta^{-1}(s)$$

($\Delta(s)$ - определитель системы (11), а A_{lj} - алгебраические дополнения B_{ij}) и подставляя в (10′), будем иметь

$$\begin{aligned}
\langle\sigma_r\rangle &= \sum_{l=1}^{6} T_l \left[\sum_{j=1}^{6} \gamma_j b_j^2(\theta) a_j^{-s}(\theta) A_{lj}\right] \Delta^{-1}(s),\\
\langle\sigma_\theta\rangle &= \sum_{l=1}^{6} T_l \left[\sum_{j=1}^{6} \gamma_j a_j^2(\theta) a_j^{-s}(\theta) A_{lj}\right] \Delta^{-1}(s),\\
\langle\tau_{r\theta}\rangle &= -\sum_{l=1}^{6} T_l \left[\sum_{j=1}^{6} \gamma_j a_j(\theta) b_j(\theta) a_j^{-s}(\theta) A_{lj}\right] \Delta^{-1}(s),\\
\langle D_\theta\rangle &= -\sum_{l=1}^{6} T_l \left[\sum_{j=1}^{6} \gamma_j a_j(\theta) f_j a_j^{-s}(\theta) A_{lj}\right] \Delta^{-1}(s),\\
\langle D_r\rangle &= \sum_{l=1}^{6} T_l \left[\sum_{j=1}^{6} \gamma_j b_j(\theta) f_j a_j^{-s}(\theta) A_{lj}\right] \Delta^{-1}(s).
\end{aligned} \tag{10''}$$

Заметим, что трансформанты $\langle\sigma_r\rangle \ldots \langle D_r\rangle$ определены в той же области, что и трансформанты внешних воздействий.

Напряжения и компоненты вектора электрической индукции определяются с помощью обратного преобразования Меллина, путь интегрирования которого лежит в полосе

$$\max_{\mathrm{Re}\, s_k < 1} (\mathrm{Re}\, s_k) < c < \min_{\mathrm{Re}\, s_k \geq 1} (\mathrm{Re}\, s_k), \tag{12}$$

где s_k $(k = 1, 2, \ldots)$ - полюсы $\langle\sigma_r\rangle \ldots \langle D_r\rangle$.

Явный вид $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}, D_\theta$ и D_r может быть получен численным интегрированием, но для их асимптотического исследования при $r \to 0$ дополним путь интегрирования (12) влево некоторым полукругом и применим теорему о вычетах. В результате получим [10, 11]

$$\begin{gathered}
\sigma_r = \sum_{k=1}^{\infty} res\left(\langle\sigma_r\rangle r^{-s_k}, s_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} r^{-s_k} \sum_{n=0}^{N_{k-1}} G_{rkn}(\theta)(\ln r)^n\\
= =\\
D_r = \sum_{k=1}^{\infty} res\left(\langle D_r\rangle r^{-s_k}, s_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} r^{-s_k} \sum_{n=0}^{N_{k-1}} H_{rkn}(\theta)(\ln r)^n,
\end{gathered} \tag{13}$$

где N_k - кратность полюсов s_k, $G_{rkn}(\theta), \ldots, H_{krn}(\theta)$ - гладкие функции угла θ, причем $\operatorname{Re} s_k < 1$ ($\operatorname{Re} s_1 > \operatorname{Re} s_2 > \ldots$).

Если внешние воздействия равны нулю в некоторой окрестности вершины клина, то в области $\operatorname{Re} s_k < 1$ нет полюсов $T_l(s)$ и все s_k этой области находятся среди нулей $\Delta(s)$. Следовательно, сингулярные члены в (13) определяются только нулями $\Delta(s)$ в полосе $0 < \operatorname{Re} s < 1$. Если $\Delta(s)$ имеет нули только первого порядка, то в выражениях (13) отсутствуют множители $\ln r$.

Для примера рассмотрим случай, когда на границах клина заданы упругие перемещения и следующие электрические условия:

$$V(r,0) = V_0(r), \qquad V(r,\theta_1) = V_1(r), \tag{14-1}$$

$$D(r,0) = D_0(r), \qquad D(r,\theta_1) = D_1(r), \tag{14-2}$$

$$V(r,0) = V_0(r), \qquad D(r,\theta_1) = D_1(r). \tag{14-3}$$

В этом случае

$$T_{l1}^*(s) = \left\| \left\langle \frac{du_0(r)}{dr} \right\rangle, \left\langle \frac{dv_0(r)}{dr} \right\rangle, \left\langle \frac{du_1(r)}{dr} \right\rangle, \left\langle \frac{dv_1(r)}{dr} \right\rangle, \left\langle \frac{dV_0(r)}{dr} \right\rangle, \left\langle \frac{dV_1(r)}{dr} \right\rangle \right\|,$$

$$T_{l2}^*(s) = \left\| \left\langle \frac{du_0(r)}{dr} \right\rangle, \left\langle \frac{dv_0(r)}{dr} \right\rangle, \left\langle \frac{du_1(r)}{dr} \right\rangle, \left\langle \frac{dv_1(r)}{dr} \right\rangle, \left\langle \frac{dD_0(r)}{dr} \right\rangle, \left\langle \frac{dD_1(r)}{dr} \right\rangle \right\|,$$

$$T_{l3}^*(s) = \left\| \left\langle \frac{du_0(r)}{dr} \right\rangle, \left\langle \frac{dv_0(r)}{dr} \right\rangle, \left\langle \frac{du_1(r)}{dr} \right\rangle, \left\langle \frac{dv_1(r)}{dr} \right\rangle, \left\langle \frac{dV_0(r)}{dr} \right\rangle, \left\langle \frac{dD_1(r)}{dr} \right\rangle \right\|,$$

где звездочка означает транспонирование. Определитель системы (11) в случае условий (14-1) имеет вид

$$\Delta_1(s) = \begin{vmatrix} M_1 & M_2 & M_4 & M_5 & \gamma_3 M_3 & \gamma_6 M_6 \\ N_1 & N_2 & N_4 & N_5 & \gamma_3 N_3 & \gamma_6 N_6 \\ c_1 a_1^{1-s} & c_2 a_2^{1-s} & c_4 a_4^{1-s} & c_5 a_5^{1-s} & \gamma_3 c_3 a_3^{1-s} & \gamma_6 c_6 a_6^{1-s} \\ d_1 a_1^{1-s} & d_2 a_2^{1-s} & d_4 a_4^{1-s} & d_5 a_5^{1-s} & \gamma_3 d_3 a_3^{1-s} & \gamma_6 d_6 a_6^{1-s} \\ m_1 & m_2 & m_4 & m_5 & m_{33} & m_{66} \\ m_1 a_1^{1-s} & m_2 a_2^{1-s} & m_4 a_4^{1-s} & m_5 a_5^{1-s} & m_{33} a_3^{1-s} & m_{66} a_6^{1-s} \end{vmatrix}, \tag{15}$$

где

$$a_j = a_j(\theta_1),\ b_j = b_j(\theta_1),\ c_j = c_j(\theta_1);\ d_j = d_j(\theta_1),$$

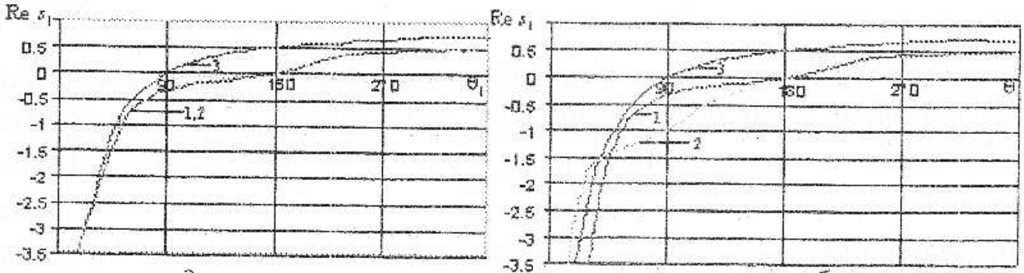
$$m_{33} = \gamma_3(g_{11}\mu_3^2 - g_{16}\mu_3 + g_{12}) + \eta_{11}\mu_3 - \eta_{12},$$

$$m_{66} = \gamma_6(g_{11}\mu_6^2 - g_{16}\mu_6 + g_{12}) + \eta_{11}\mu_6 - \eta_{12}.$$

Заменяя в пятой и шестой строках m_j на f_j, получим $\Delta_2(s)$ для граничной задачи (14-2), а для получения $\Delta_3(s)$ такая замена необходима только в шестой строке.

Определители $\Delta_1(s)$, $\Delta_2(s)$ и $\Delta_3(s)$ после некоторых известных преобразований совпадают с таковыми, полученными совершенно иным путем в работе [4], что и следовало ожидать.

Результаты численного исследования зависимости $\operatorname{Re} s_1$ от угла раствора клина, изготовленного из бифталата калия или бифталата рубидия, представлены в виде кривых на рисунке, а и б соответственно (номера кривых соответствуют номерам граничных условий (14)).



а б

Из приведенных кривых следует, что только смешанные электрические граничные условия уменьшают предельный угол раствора клина θ_{np}, при котором окрестность угловой точки переходит из малонапряженного состояния ($\theta_1 < \theta_{np}$) в концентрационное ($\theta_1 > \theta_{np}$). При граничных условиях (14-1) и (14-2) $\theta_{np} = \pi$.

С помощью использованного в данной работе метода можно построить решения плоских связанных задач электроупругости и для составного клина при разнообразных гранично-контактных условиях и определить степени сингулярности σ_{ij} или D_j, а также коэффициенты особенности.

Институт механики НАН РА

Ա.Մ. Սարգսյան

Սեպաձև փիրույթների համար էլեկտրաառաձգականության եզրային խնդիրների լուծման մասին

Մելինի ընդհանրացված ինտեգրալ ձևափոխության օգնությամբ կառուցվել է էլեկտրաառաձգականության տեսության հարթ կապակցված խնդիրների լուծումը բարակ սեպաձև փիրույթի համար, որի եզրերին տրված են տարբեր էլեկտրամեխանիկական պայմաններ: Հետազոտվել է էլեկտրաառաձգական դաշտի բնութագրիչների (լարումներ, ինդուկցիայի վեկտորի

բաղադրիչներ) վարքը սեպի գագաթի շրջակայքում: Մասնավոր դեպքում, երբ սեպի եզրերին տրված են տեղափոխումների և էլեկտրական պոտենցիալի արժեքները, երկու տարբեր նյութերի համար կառուցված են կորեր, որոնք բացահայտում են լարումների եզակիության ցուցչի կախվածությունը սեպի անկյան բացվածքի մեծությունից:

A.M. Sargsian

On Solution of Boundary Problems of Electro-elasticity for Wedge-shaped Areas

With the help of Mellin's generalized integral transformation the solution of a plane-connected problem of electro-elasticity for a thin wedge-shaped area is built. On the borders of this area different electromechanical conditions are given.

The behaviour of the electroelastic field characteristics (stress, the components of the electric induction vector) in the vicinity of the wedge top is investigated. In a private case, when on the borders of the wedge elastic displacements and electric potential are given, the graphs of the dependence of the stresses singularity degree and the components of electric induction vector from the angle of mixture of the piezoelectric wedge are built.

Литература

1. *Саргсян А.М.* - ДНАН Армении. 1999 Т. 99. N1. С. 34-39.
2. *Саргсян А.М.* - Сб. научных трудов конференции, посвященной 91-летию со дня рождения профессоров Т.Т.Хачатряна и О.М. Сапонджяна, состоявшейся 23-24 октября 1998г. в г. Ереване. Ереван. С. 169-175.
3. *Саргсян А.М.* - Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т. 55. N2. С. 36-41.
4. *Саргсян А.М., Нерсисян Г.Г.* - Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т. 58. N3. С.74-81.
5. *Баблоян А.А., Мелкумян С.А.* - ДНАН Армении. 1999. N1. С. 45-51.
6. *Баблоян А.А., Мелкумян С.А.* - ДНАН Армении. 1999. N2. С. 172-177.
7. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М. Наука. 1977. 416 с.
8. *Космодаминский А.С., Ложкин В.Н.* - ПМ. 1975. N5. С. 45-53.
9. *Михайлов С.Е.* - МТТ. 1978. N4. С. 155-160.
10. *Михайлов С.Е.* - МТТ. 1979. N6. С. 33-42.
11. *Саргсян А.М.* - Изв. НАН Армении. Механика. 2004. N2. С. 11-17.