

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

В. С. Макарян

Поведение трещины под сжимающей нагрузкой

(Представлено академиком С.А. Амбарцумяном 22/IX 2005)

Ключевые слова: трещина, упругость, разрушение, контактное напряжение, интегральное уравнение

Исследованию напряженно-деформированного состояния упругих сред, содержащих трещины различной конфигурации, посвящено множество работ. Когда в рамках линейной теории упругости говорят, что упругая среда расслаблена трещиной, обычно подразумевается, что последняя в результате деформации оказалась в зоне растягивающих напряжений, что в свою очередь приводит к отходу берегов трещины друг от друга: возникает угроза увеличения размеров трещины, иными словами - угроза разрушения упругой среды. В тех случаях, когда трещина расположена на поверхности раздела двух различных материалов, напряженно-деформированное состояние упругого тела вблизи границ трещины определить однозначно не удастся из-за наличия так называемых осциллирующих множителей в формулах напряжений и деформаций. И хотя явление бесконечной знакопеременности имеет место только в достаточно малой окрестности границы трещины, в последнее время многими авторами все чаще отмечается необходимость корректировки постановки задач о трещинах, находящихся на поверхностях раздела двух материалов. В частности, в работах [1,2] делается допущение, что в результате действия растягивающих нормальных и сдвигающих нагрузок, приложенных на бесконечности, вблизи концов трещины могут образоваться зоны контакта берегов трещины, подлежащие определению. Такая постановка задачи позволяет избежать указанных выше осциллирующих множителей и дает возможность

В настоящей работе проводится исследование поведения трещин, которые находятся под воздействием сжимающих нагрузок. Показывается, что трещины, находясь в зоне сжимающих напряжений, т.е. когда берега трещин полностью смыкаются, вообще говоря, являются источником разрушения упругой среды.

Для более наглядного представления постановки и метода решения задачи ниже рассматривается только один случай расположения трещин.

Постановка задачи: пусть упругая плоскость состоит из двух различных материалов, соединенных между собой по линии $y=0$, $-\infty < x < \infty$. На линии соединения двух полуплоскостей имеются трещины, расположенные на участках $y=0, |x| > c$. На бесконечности действуют сжимающие нормальные нагрузки (рис.1). Будем предполагать, что в результате деформации берега трещин смыкаются и происходит контакт берегов трещин без сцепления, т.е. касательные напряжения на участке контакта $y=0, |x| > c$ равны нулю.

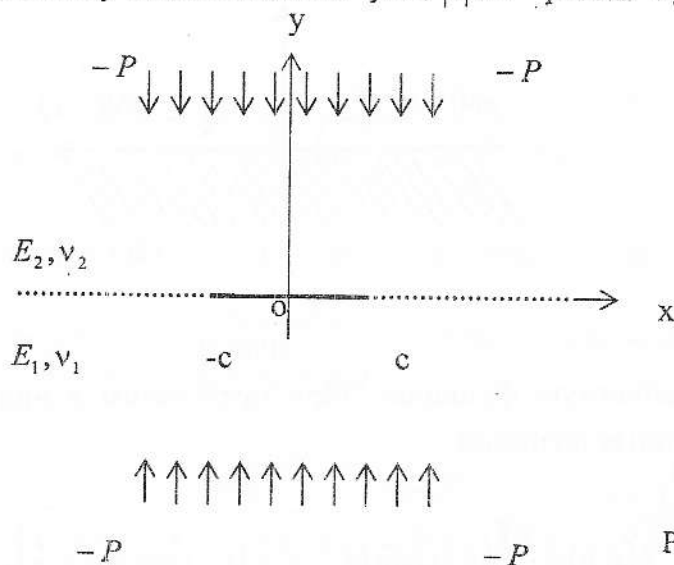


Рис. 1

Граничные условия задачи, с учетом условий симметрии относительно линии $x=0$, запишем в следующем виде:

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \sigma_y^{(1)}(x, y) = -P, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \sigma_y^{(2)}(x, y) = -P, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$\sigma_x^{(1)}(x, y) = \sigma_x^{(2)}(x, y), \quad V_y^{(1)}(x, y) = V_y^{(2)}(x, y) \quad -\infty < x < \infty,$$

$$\tau_{xy}^{(1)}(x, y) = \tau_{xy}^{(2)}(x, y) = 0, \quad |x| > c \quad \text{и} \quad \tau_{xy}^{(1)}(x, y) = \tau_{xy}^{(2)}(x, y), \quad -c < x < c, \quad (1)$$

$$U_x^{(1)}(x, y) = U_x^{(2)}(x, y), \quad -c \leq x \leq c,$$

$$\tau_{xy}^{(1)}(0, y) = U_x^{(1)}(0, y) = 0, \quad -\infty < y < 0 \text{ и } \tau_{xy}^{(2)}(0, y) = U_x^{(2)}(0, y) = 0, \quad 0 < y < \infty.$$

В граничных условиях (1) индексы «1» отнесены к нижней полуплоскости, а индексы «2» - к верхней.

Рассмотрим сначала две вспомогательные задачи, аналогичные задачам Фламана и Черутти, соответственно.

Задача 1: сосредоточенные нормальные силы на границе упругой полуплоскости (рис. 2). Граничные условия задачи:

$$\sigma_y(x, y) = P[\delta(t-x) + \delta(t+x)], \quad \tau(x, y) = 0, \quad y = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (2)$$

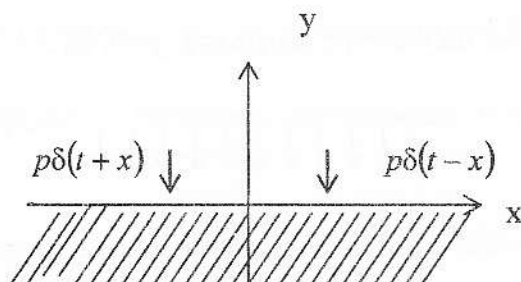


Рис. 2

Бигармоническую функцию Эйри представим в виде суммы следующих двух элементарных функций:

$$\phi(x, y) = \frac{P}{\pi} \left[(x-t) \arg \operatorname{tg} \frac{x-t}{y} + (x+t) \arg \operatorname{tg} \frac{x+t}{y} \right]. \quad (3)$$

Компоненты напряжений и перемещений выражаются через бигармоническую функцию (3) следующими соотношениями:

$$\sigma_y(x, y) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{2P}{\pi} \left[\frac{y}{(x-t)^2 + y^2} + \frac{y}{(x+t)^2 + y^2} - \frac{(x-t)^2 y}{((x-t)^2 + y^2)^2} - \frac{(x+t)^2 y}{((x+t)^2 + y^2)^2} \right]; \quad (4)$$

$$\sigma_x(x, y) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{2P}{\pi} \left[\frac{(x-t)^2 y}{((x-t)^2 + y^2)^2} + \frac{(x+t)^2 y}{((x+t)^2 + y^2)^2} \right]; \quad (5)$$

$$\tau_{xy}(x, y) = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{2P}{\pi} \left[\frac{x-t}{(x-t)^2 + y^2} + \frac{x+t}{(x+t)^2 + y^2} - \frac{(x-t)^3}{((x-t)^2 + y^2)^2} - \frac{(x+t)^3}{((x+t)^2 + y^2)^2} \right]; \quad (6)$$

$$EU_x(x, y) = \int \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} dx - \nu \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad EV_y(x, y) = \int \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dy - \nu \frac{\partial \phi}{\partial y}; \quad (7)$$

$$EU_x(x, y) = \frac{P}{\pi} \left[(1-\nu) \left(\arctg \frac{x-t}{y} + \arctg \frac{x+t}{y} \right) - (1+\nu) \left(\frac{(x-t)y}{(x-t)^2 + y^2} + \frac{(x+t)y}{(x+t)^2 + y^2} \right) \right]; \quad (8)$$

$$EV_y(x, y) = \frac{P}{\pi} \left[\ln((x+t)^2 + y^2) + \ln((x-t)^2 + y^2) + (1+\nu) \left(\frac{(x-t)^2}{(x-t)^2 + y^2} + \frac{(x+t)^2}{(x+t)^2 + y^2} \right) \right] + EV_0. \quad (9)$$

На границе $y = 0$, будем иметь:

$$\sigma_y(x, 0) = \frac{2P}{\pi} \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{y}{(x-t)^2 + y^2} + \frac{y}{(x+t)^2 + y^2} - \frac{(x-t)^2 y}{((x-t)^2 + y^2)^2} - \frac{(x+t)^2 y}{((x+t)^2 + y^2)^2} \right] =$$

$$P[2\delta(t-x) + 2\delta(t+x) + (t+x)\delta'(t+x) + (x-t)\delta'(x-t)] = P[\delta(t-x) + \delta(t+x)]; \quad (10)$$

$$\sigma_x(x, 0) = \frac{2P}{\pi} \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{(t-x)^2 y}{((t-x)^2 + y^2)^2} + \frac{(t+x)^2 y}{((t+x)^2 + y^2)^2} \right] = P[\delta(t-x) + \delta(t+x)]; \quad (11)$$

$$\tau_{xy}(x, 0) = -\frac{2P}{\pi} \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{x-t}{(x-t)^2 + y^2} + \frac{x+t}{(x+t)^2 + y^2} - \frac{(x-t)^3}{((x-t)^2 + y^2)^2} - \frac{(x+t)^3}{((x+t)^2 + y^2)^2} \right] = 0; \quad (12)$$

$$EU_x(x, 0) = \frac{P(1-\nu)}{2} [\text{sign}(t+x) - \text{sign}(t-x)], \quad EV_y(x, 0) = \frac{2P}{\pi} [\ln|t+x| + \ln|t-x|]. \quad (13)$$

Задача 2: тангенциальные сосредоточенные силы на границе упругой полуплоскости (рис.3). Граничные условия задачи:

$$\tau_{xy}(x, 0) = q[\delta(t-x) + \delta(t+x)], \quad \sigma_y(x, 0) = 0 \quad -\infty < x < \infty. \quad (14)$$

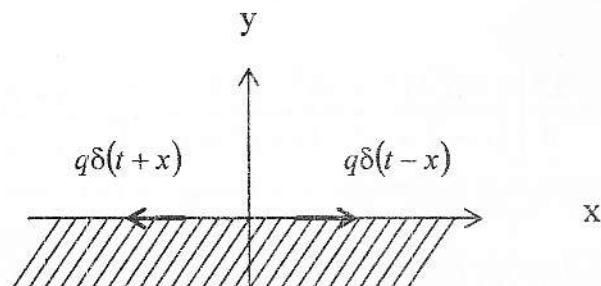


Рис.3

Функцию Эйри представим в следующем виде:

$$\phi(x, y) = \frac{q}{\pi} \left(y \arg \operatorname{tg} \frac{t-x}{y} + y \arg \operatorname{tg} \frac{t+x}{y} \right); \quad (15)$$

$$\sigma_y(x, y) = -\frac{2qy^2}{\pi} \left[\frac{t-x}{((t-x)^2 + y^2)^2} + \frac{t+x}{((t+x)^2 + y^2)^2} \right]; \quad (16)$$

$$\sigma_x(x, y) = -\frac{2q}{\pi} \left[\frac{(t-x)^3}{((t-x)^2 + y^2)^2} + \frac{(t+x)^3}{((t+x)^2 + y^2)^2} \right]; \quad (17)$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{2qy}{\pi} \left[\frac{(t-x)^2}{((t-x)^2 + y^2)^2} - \frac{(t+x)^2}{((t+x)^2 + y^2)^2} \right]; \quad (18)$$

$$EU_x(x, y) = -\frac{q}{\pi} \left[\ln((t+x)^2 + y^2) - \ln((t-x)^2 + y^2) + (1+\nu)y^2 \left(\frac{1}{(t+x)^2 + y^2} - \frac{1}{(t-x)^2 + y^2} \right) \right]; \quad (19)$$

$$EV_y(x, y) = \frac{q}{\pi} \left[(1-\nu) \left(\arg \operatorname{tg} \frac{t-x}{y} + \arg \operatorname{tg} \frac{t+x}{y} \right) + (1+\nu) \left(\frac{(t-x)y}{(t-x)^2 + y^2} + \frac{(t+x)y}{(t+x)^2 + y^2} \right) \right] -$$

$$\frac{q}{2} \left(\operatorname{sign} \frac{y}{t-x} + \operatorname{sign} \frac{y}{t+x} \right) + V_0. \quad (20)$$

Поступая как в задаче 1, получим следующие выражения на границе $y = 0$, $-\infty < x < \infty$:

$$\tau_{xy}(x, 0) = q[\delta(t-x) - \delta(t+x)], \quad \sigma_y(x, 0) = 0, \quad (21)$$

$$EU_x(x,0) = \frac{2q}{\pi} \ln \frac{t-x}{t+x}, \quad EV_y(x,0) = \frac{q(1-\nu)}{2} [\text{sign}(t-x) + \text{sign}(t+x)] + V_0. \quad (22)$$

На основе решений двух рассмотренных вспомогательных задач и принципа наложения в линейной теории будем иметь:

$$U_x^{(1)}(x,0) = \frac{1-\nu_1}{2E_1} \int_{-\infty}^{\infty} p(t) [\text{sign}(t+x) - \text{sign}(t-x)] dt + \frac{2}{\pi E_1} \int_{-c}^c q(t) \ln \left| \frac{t-x}{t+x} \right| dt + P\nu_1; \quad (23)$$

$$U_x^{(2)}(x,0) = \frac{1-\nu_2}{2E_2} \int_{-\infty}^{\infty} p(t) [\text{sign}(t+x) - \text{sign}(t-x)] dt - \frac{2}{\pi E_2} \int_{-c}^c q(t) \ln \left| \frac{t-x}{t+x} \right| dt + P\nu_2; \quad (24)$$

$$V_y^{(1)}(x,0) = \frac{1-\nu_1}{2E_1} \int_{-c}^c q(t) [\text{sign}(t-x) + \text{sign}(t+x)] dt + \frac{2}{\pi E_1} \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \ln |(t-x)(t+x)| dt; \quad (25)$$

$$V_y^{(2)}(x,0) = \frac{1-\nu_2}{2E_2} \int_{-c}^c q(t) [\text{sign}(t-x) + \text{sign}(t+x)] dt - \frac{2}{\pi E_2} \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \ln |(t-x)(t+x)| dt; \quad (26)$$

В (23) - (26) введены обозначения

$$p(x) \equiv \sigma_y^{(1)}(x,0) + P \equiv \sigma_y^{(2)} + P, \quad q(x) \equiv \tau_{xy}^{(1)}(x,0) \equiv \tau_{xy}^{(2)}(x,0) \quad -\infty < x < \infty. \quad (27)$$

Удовлетворяя условиям равенства перемещений на линии контакта и дифференцируя последние по x , для определения неизвестных контактных напряжений получим следующую систему интегральных уравнений:

$$2 \left[\frac{1-\nu_1}{E_1} - \frac{1-\nu_2}{E_2} \right] p(x) - \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right] \int_{-c}^c \frac{q(t)}{t-x} dt + P \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) = 0 \quad -c < x < c; \quad (28)$$

$$2 \left[\frac{1-\nu_1}{E_1} - \frac{1-\nu_2}{E_2} \right] q(x) + \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(t)}{t-x} dt = 0 \quad -\infty < x < \infty; \quad (29)$$

Применяя к уравнению (29) обратное преобразование Гильберта, получим

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{E_2(1-\nu_1) - E_1(1-\nu_2)}{E_1 + E_2} \int_{-c}^c \frac{q(t)}{t-x} dt, \quad -\infty < x < \infty. \quad (30)$$

С учетом соотношения (30) уравнение (28) примет вид

$$\int_{-c}^c \frac{q(t)}{t-x} dt = \frac{P\pi(E_2 v_1 - E_1 v_2)(E_1 + E_2)}{\bar{E}_1 \bar{E}_2}, \quad -c < x < c; \quad (31)$$

$$\bar{E}_1 = [E_2(1+v_1) + E_1(3-v_2)], \quad \bar{E}_2 = [E_1(1+v_2) + E_2(3-v_1)]. \quad (32)$$

Имея в виду известное значение интеграла Коши [5]

$$\pi, \quad -c < x < c,$$

$$\int_{-c}^c \frac{t dt}{\sqrt{c^2 - x^2}(t-x)} =$$

$$\pi - \frac{\pi x \operatorname{sign} x}{\sqrt{x^2 - c^2}}, \quad -\infty < x < \infty, \quad (33)$$

из системы (30) и (31) окончательно получим следующие формулы для контактных напряжений:

$$P_0, \quad -c < x < c,$$

$$\sigma_y^{(1,2)}(x, 0) = \quad (34)$$

$$P_0 - \frac{P}{4} \left(2 - \frac{3E_1 + E_2}{\bar{E}_1} - \frac{E_1 + 3E_2}{\bar{E}_2} \right) \frac{x \operatorname{sign} x}{\sqrt{x^2 - c^2}}, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$\text{где} \quad P_0 \equiv -\frac{P}{4} \left(2 + \frac{3E_1 + E_2}{\bar{E}_1} + \frac{E_1 + 3E_2}{\bar{E}_2} \right), \quad (35)$$

$$0 \quad |x| > c,$$

$$\tau_{xy}^{(1,2)}(x, 0) = \quad (36)$$

$$\frac{P(E_2 v_1 - E_1 v_2)(E_1 + E_2)}{\bar{E}_1 \bar{E}_2} \frac{x}{\sqrt{c^2 - x^2}}, \quad -c < x < c.$$

Легко убедиться, что нормальные контактные напряжения $p(x)$ самоуравновешены:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 0, \quad (37)$$

а из условия

$$E_2 v_1 = E_1 v_2 \quad (38)$$

следует:

$$\sigma_y^{(1,2)}(x, 0) = -P, \quad \tau_{xy}^{(1,2)}(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty. \quad (39)$$

Формулы (34) и (36) показывают, что напряжения, действующие на линии контакта двух материалов, имеют на границах трещины корневые особенности, кроме случая, когда имеет место условие (38). Фактически трещины, находящиеся в зоне сжимающих напряжений («закрывающиеся трещины»), могут привести к разрушению упругого тела. В отличие от случая, когда трещины находятся в зоне растягивающих напряжений («раскрывающиеся трещины»), здесь отсутствуют осцилляции в формулах контактных напряжений.

Институт механики НАН РА
E-mail: vmakaryan@yahoo.com

Վ. Ս. Մակարյան

Ճաքի վարքը ճնշող բեռի տակ

Աշխատանքում կատարված է ճաքերի վարքի հետազոտությունը, որոնք զարկում են ճնշող բեռների ազդեցության տակ («փակվող ճաքեր»): Ցույց է տրվում, որ այդպիսի ճաքերը կարող են առաձգական միջավայրի քայքայման աղբյուր դառնալ:

V. S. Makaryan

Crack Behavior under Compressing Load

In the paper the cracks behavior is investigated under the action of compressing load. It is shown that such cracks can bring to the elastic media destruction. The solution is build up by means of two biharmonic functions of $x \arctg \frac{x}{y}$, $y \arctg \frac{y}{x}$, the use of which allows to exclude Furie integral transformation apparatus.

Литература

1. Дандерс, Комниноу. Разрушение композитных материалов. Рига. 1979.
2. Улитко А.Ф. в сб.: Совр. о роблемы ме. аники сплошной среды. Ростов — на — Дону. 1995. С. 185 — 19у.
3. Новацкий В. Теория упругости. М. 1975. 872 с.
4. Прудников А. и др - Интегралы и ряды. В 3-х т. М. Физлит. 2003.
5. Гахов Ф.Д. Красвые задачи. М. Наука. 1977. 640 с.