ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Volume 106 2006 № 2

МЕХАНИКА

УДК 539.3

А. С. Аветисян, Д. Р. Алексанян

Об одной задаче термоупругой устойчивости составной круговой кольцевой пластинки

(Представлено академиком С.А. Амбарцумяном 21/IV 2006)

Ключевые слова: *термоупругость, термоустойчивость, составная пластина, критическая температура, зона сжатия*

1. Обозначим через E_i, ν_i, α_i $(i=1,2)$ модуль упругости, коэффициент Пуассона и коэффициент теплового расширения материалов I и II частей составной пластинки. Вследствие радиальной симметрии задача плоско-напряженного состояния теории термоупругости составной кольцевой пластинки сводится к определению компоненты перемещения $u_i(r)$ по радиальному направлению, которая удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению [1-4]

$$\frac{d^2u_i}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du_i}{dr}-\frac{1}{r^2}u_i=0. \tag{1.1}$$

Статически эквивалентные напряжениям $\sigma_r^{(i)}$, $\sigma_\theta^{(i)}$ $(i=1,2)$ внутренние усилия определяются следующим образом

$$N_r^{(i)}=\frac{E_ih}{1-\nu_i^2}\left[\frac{du_i}{dr}+\nu_i\frac{u_i}{r}-(1+\nu_i)\alpha_iT\right],$$

$$N_\theta^{(i)}=\frac{E_ih}{1-\nu_i^2}\left[\frac{u_i}{r}+\nu_i\frac{du_i}{dr}-(1+\nu_i)\alpha_iT\right],\qquad i=1,2, \tag{1.2}$$

где T - изменение температуры, h - толщина пластинки.

Решения уравнений (1,1) в срединной плоскости на окружностях $r=c$ и $r=a$ удовлетворяют следующим условиям свободного края, а на линии контакта $r=b$ - условиям идеального контакта

$$N_r^{(1)}=0 \text{ на } r=c,\quad N_r^{(2)}=0 \text{ на } r=a,$$

$$u_1=u_2,\quad N_r^{(1)}=N_r^{(1)} \text{ на } r=b. \tag{1.3}$$

Решения уравнений (1,1) имеют следующий вид

$$u_1(r)=C_1 r+\frac{C_2}{r}, \qquad c\le r<b,$$

$$u_2(r)=D_1 r+\frac{D_2}{r}, \qquad b<r\le a, \tag{1.4}$$

Для внутренних усилий, соответствующих перемещениям (1,4) получим следующие формулы

$$\left.\begin{aligned} N_r^{(1)} &= -\frac{E_1 h}{1+\nu_1}\mu\,æ\lambda^*\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{r^2}\right)\\ N_\theta^{(1)} &= -\frac{E_1 h}{1+\nu_1}\mu\,æ\lambda^*\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{r^2}\right)\end{aligned}\right\} \qquad c\le r<b,$$

$$\left.\begin{aligned} N_r^{(2)} &= \frac{E_2 h}{1+\nu_2}æ\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}\right)\\ N_\theta^{(2)} &= \frac{E_2 h}{1+\nu_2}æ\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{r^2}\right)\end{aligned}\right\} \qquad b<r\le a, \tag{1.5}$$

где $\mu=\frac{G_2}{G_1}$, G_1 и G_2 модули сдвига материалов в области I и II,

$$æ=\frac{b^2T(\alpha_1-\alpha_2)}{1+\lambda_2^2\nu_2^*+\mu\lambda^*(1+\lambda_1^2\nu_1^2)}, \qquad \nu_i^*=\frac{1-\nu_i}{1+\nu_i}, \qquad \lambda^x=\frac{1-\lambda_2^2}{\lambda_1^2-1}, \qquad \lambda_1=\frac{b}{c}, \qquad \lambda_2=\frac{b}{a}.$$

2. Осесимметричная задача термоупругой устойчивости составной кольцевой пластинки сводится к решению следующей краевой задачи:

$$D_i\Delta\Delta w_i=-\left[N_r^{(i)}(r)æ_1^{(i)}+N_\theta^{(i)}(r)æ_2^{(i)}\right], \qquad i=1,2, \tag{2.1}$$

где D_i - цилиндрическая жесткость пластинки, w_i - поперечный прогиб пластинки, $æ_1^{(i)}$, $æ_2^{(i)}$ - кривизны изогнутой поверхности по направлению диаметра и перпендикулярному ему направлению,

$$D_i=\frac{E_i h^3}{12(1-\nu_i^2)}, \qquad \Delta=\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr},$$

$$æ_1^{(i)}=-\frac{d^2 w}{dr^2}, \qquad æ_2^{(i)}=-\frac{1}{r}\frac{dw_i}{dr}, \qquad i=1,2.$$

Перерезывающие силы и изгибающие моменты определяются следующими формулами

$$M_r^{(i)}=D_i\left(æ_1^{(i)}+\nu_i æ_2^{(i)}\right); \qquad Q_r^{(i)}=-D_i\frac{d}{dr}(\Delta w_i), \qquad i=1,2.$$

Решения (2.1) на линии контакта $r=b$ должны удовлетворять следующим условиям идеального контакта:

$$w_1=w_2, \qquad \frac{dw_1}{dr}=\frac{dw_2}{dr},$$

$$M_r^{(1)}=M_r^{(2)}, \qquad Q_r^{(1)}=Q_r^{(2)} \qquad \text{на} \quad r=b. \tag{2.2}$$

В случае шарнирного опирания на контурах $r=c$, $r=a$ должны выполняться следующие граничные условия:

$$w_1=0,\qquad M_r^{(1)}=0\qquad \text{на}\qquad r=c,$$

$$w_2=0,\qquad M_r^{(2)}=0\qquad \text{на}\qquad r=a. \tag{2.3}$$

В случае, когда контуры $r=c$ и $r=a$ свободны от внешних силовых воздействий и связей, имеем:

$$M_r^{(1)}=0,\qquad Q_r^{(1)}=0\qquad \text{на}\qquad r=c,$$

$$M_r^{(2)}=0,\qquad Q_r^{(2)}=0\qquad \text{на}\qquad r=a. \tag{2.4}$$

Уравнения, определяющие поперечные перемещения w_i $(i=1,2)$, приводятся к следующему виду:

$$\Delta\Delta w_1+\frac{12(1-\nu_1)}{h^2}\,\frac{\mu\lambda^*\lambda_1^2}{\Delta}T(\alpha_1-\alpha_2)\left[\left(1+\frac{c^2}{r^2}\right)\Delta w_1-\frac{2c^2}{r^2}\frac{d^2w_1}{dr^2}\right]=0, \tag{2.5}$$

$$\Delta\Delta w_2-\frac{12(1-\nu_1)}{h^2}\,\frac{\lambda_2^2}{\Delta}T(\alpha_1-\alpha_2)\left[\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\Delta w_2-\frac{2a^2}{r^2}\frac{d^2w_2}{dr^2}\right]=0, \tag{2.6}$$

где $\quad \Delta=1+\lambda_2^2\nu_2^*+\mu\lambda^*(1+\lambda_1^2\nu_1^*)$.

Рассмотрим следующие случаи.

Пусть $T(\alpha_1-\alpha_2)>0\Rightarrow\quad T>0,\ \ \alpha_1>\alpha_2$ или $T<0,\ \ \alpha_1<\alpha_2$.

Обозначим
$$\beta_1^2=\frac{12(1-\nu_1)}{h^2}\,\frac{\mu\lambda^*\lambda_1^2}{\Delta}T(\alpha_1-\alpha_2),\qquad \beta_1 r=x_1,$$

$$\beta_2^2=\frac{12(1-\nu_2)}{h^2}\,\frac{\lambda_2^2}{\Delta}T(\alpha_1-\alpha_2),\qquad \beta_2 r=x_2.$$

Уравнения (2.5) и (2.6) примут вид

$$\Delta_x\Delta_x w_1+\left(1+\frac{c^2\beta_1^2}{x_1^2}\right)\Delta_x w_1-\frac{2\beta_1^2c^2}{r^2}\frac{d^2w_1}{dx_1^2}=0, \tag{2.7}$$

$$\Delta_x\Delta_x w_2-\left(1+\frac{a^2\beta_2^2}{x_2^2}\right)\Delta_x w_2+\frac{2a^2\beta_1^2}{x_2^2}\frac{d^2w_2}{dx_2^2}=0, \tag{2.8}$$

где $\Delta_x=\dfrac{d^2}{dx^2}+\dfrac{1}{x}\dfrac{d}{dx}$.

Обозначив $w_i'=z_i$, после некоторых преобразований решение уравнения (2.7) можно свести к решению уравнения

$$x_1^2z_1''+x_1z_1'-(\xi^2-x_1^2)z_1=Cx_1, \tag{2.9}$$

а решение уравнения (2.8) – к решению уравнения

$$x_2^2z_2''+x_2z_2'-(\eta_2^2+x_2^2)z_2=\overline{C}x_2. \tag{2.10}$$

Здесь C и $\overline{C}$ - постоянные интегрирования $\xi^2=1+c^2\beta_1^2$, $\eta^2=1-a^2\beta_2^2$.

Общее решение уравнения (2.9) представляется в виде

$$z_1 = C_1(x)J_\xi(x_1) + C_2(x_1)Y_\xi(x_1), \tag{2.11}$$

где $I_\xi(x_1)$, $Y_\xi(x_1)$ - функции Бесселя первого и второго рода, а произвольные функции $C_1(x)$, $C_2(x)$ определяютя методом вариации произвольного постоянного [5].

Окончательно для w_1 получим

$$w_1 = \int\limits_{\beta_1 c}^{x_1} \left[\overline{C}_1 J_\xi(x) + \overline{C}_2 Y_\xi(x)\right]dx + \frac{C\pi}{2}\int\limits_{\beta_1 c}^{x_1} f_1(x)dx + C_o, \tag{2.12}$$

где $\quad f_1(x) = Y_\xi(x)\int\limits_{\beta_1 c}^{x} J_\xi(x_2)dx_2 - J_\xi(x)\int\limits_{\beta_1 c}^{x} Y_\xi(x_2)dx_2 .$

Аналогичным образом для $w_2(x_2)$ получим

$$w_2 = \int\limits_{\beta_2 a}^{x_2} \left[\overline{E}_1 I_\eta(x) + \overline{E}_2 K_\eta(x)\right]dx + \overline{C}\int\limits_{\beta_2 a}^{x_2} f_2(x)dx + E_o, \tag{2.13}$$

где $J_\eta(x_2)$, $K_\eta(x_2)$ - цилиндрические функции мнимого аргумента,

$$f_2(x) = I_\eta(x)\int\limits_{\beta_2 a}^{x} K_\eta(x_2)dx_2 - K_\eta(x)\int\limits_{\beta_2 a}^{x} I_\eta(x_2)dx_2 .$$

3. Пусть $T(\alpha_1 - \alpha_2) < 0 \;\Rightarrow\; T < 0,\quad \alpha_1 > \alpha_2$ или $T > 0,\quad \alpha_1 < \alpha_2$.

В этом случае уравнения (2.5) и (2.6) представим в виде

$$\Delta_x\Delta_x w_1 - \left(1 + \frac{\overline{\beta}_1^2 c^2}{x_1^2}\right)\Delta_x w_1 + \frac{2\overline{\beta}_1^2 c^2}{x_1^2}\frac{d^2 w_1}{d\,x_1^2} = 0, \tag{3.1}$$

$$\Delta_x\Delta_x w_2 + \left(1 + \frac{\overline{\beta}_2^2 a^2}{x_2^2}\right)\Delta_x w_2 - \frac{2\overline{\beta}_2^2 a^2}{x_2^2}\frac{d^2 w_1}{d\,x_2^2} = 0, \tag{3.2}$$

где $\quad \overline{\beta}_1^2 = \dfrac{12(1-\nu_1)}{h^2}\dfrac{\mu\lambda^*\lambda_1^2}{\Delta}T(\alpha_2 - \alpha_1), \qquad \overline{\beta}_1 r = x_1,$

$\quad \overline{\beta}_2^2 = \dfrac{12(1-\nu_2)}{h^2}\dfrac{\lambda_2^2}{\Delta}T(\alpha_2 - \alpha_1), \qquad \overline{\beta}_2 r = x_2.$

Для поперечных перемещений w_1 и w_2 окончательно получаются следующие представления

$$w_1 = \int\limits_{\beta_1 c}^{x_1} \left[\overline{F}_1 I_{\overline{\eta}}(x) + \overline{F}_2 K_{\overline{\eta}}(x)\right]dx + C\int\limits_{\beta_1 c}^{x_1} \bar{f}_1(x)dx + F_o, \tag{3.3}$$

$$w_2 = \int\limits_{\overline{\beta}_2 a}^{x_2} \left[\overline{H}_1 J_{\overline{\xi}}(x) + \overline{H}_2 Y_{\overline{\xi}}(x)\right]dx + \frac{H_o\pi}{2}\int\limits_{\overline{\beta}_2 a}^{x_2} \bar{f}_2(x)dx + H_o, \tag{3.4}$$

где $\quad \overline{\eta}^2 = 1 - c^2\overline{\beta}_1^2, \qquad \xi^2 = 1 + a^2\overline{\beta}_2^2,$

$$\bar{f}_1(x) = I_{\bar{\eta}}(x)\int_{\bar{\beta}_1 c}^{x} K_{\bar{\eta}}(x_2)dx_2 - K_{\bar{\eta}}(x)\int_{\bar{\beta} c}^{x} I_{\bar{\eta}}(x_2)dx_2,$$

$$\bar{f}_2(x) = Y_{\bar{\xi}}(x)\int_{\bar{\beta}_2 a}^{x} J_{\bar{\xi}}(x_2)dx_2 - J_{\bar{\xi}}(x_2)\int_{\bar{\beta} a}^{x} Y_{\bar{\xi}}(x_2)dx_2,$$

4. В предельных случаях, когда 1) $E_2 \to \infty$, $\alpha_2 \to 0$, 2) $E_1 \to \infty$, $\alpha_1 \to 0$. Задача термоупругой устойчивости сотавной пластинки сводится к двум задачам термоустойчивости однородной кольцевой пластинки, когда пластинка подвергается равномерному изменению температуры.

При этом в первом случае кольцевая пластинка по внешнему контуру $r = a$ срединной плоскости защемлена, а по внутреннему контуру $r = b$ свободна от внешних силовых воздействий и связей, во втором случае пластинка по внутреннему контуру $r = b$ защемлена в срединной плоскости, а по внешнему свободна от внешних силовых воздействий и связей.

В этих предельных случаях для усилий имеем

$$N_r^{(1)} = -\frac{Eh}{1+\nu}\frac{\alpha T\bar{\lambda}^2}{1+\bar{\lambda}^2\nu^*}\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right), \quad N_{\theta r}^{(1)} = -\frac{Eh}{1+\nu}\frac{\alpha T\bar{\lambda}^2}{1+\bar{\lambda}^2\nu^*}\left(1+\frac{b^2}{r^2}\right), \tag{4.1}$$

$$N_r^{(2)} = -\frac{Eh}{1+\nu}\frac{\alpha T\lambda^2}{1+\lambda^2\nu^*}\left(\frac{a^2}{r^2}-1\right), \quad N_{\theta}^{(2)} = -\frac{Eh}{1+\nu}\frac{\alpha T\lambda^2}{1+\lambda^2\nu^*}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right), \tag{4.2}$$

где $\nu^* = \dfrac{1-\nu}{1+\nu}$, $\bar{\lambda} = \dfrac{a}{b} > 1$, $\lambda = \dfrac{b}{a}$.

В первом случае, когда $T < 0$, т. е начиная с температуры соединения, пластинка равномерно охлаждается:

$$N_r^{(1)} > 0, \quad N_\theta^{(1)} > 0 \qquad \text{при} \quad b \le r \le a,$$

плоская форма пластинки устойчива.

Во втором случае возможна потеря устойчивости плоской формы пластинки как при нагревании, так и при охлаждении.

В первом случае при $T > 0$ для определения поперечного перемещения w получим дифференицальное уравнение

$$\Delta\Delta w + \frac{Eh}{1+\nu}\frac{\alpha T\bar{\lambda}^2}{(1+\bar{\lambda}^2\nu^*)D}\left[\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right)\frac{d^2w}{dr^2} + \left(1+\frac{b^2}{r^2}\right)\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right]. \tag{4.3}$$

Общее решение уравнения (4.3) имеет вид

$$\begin{gathered} w = \int_{\beta a}^{x}\left[\bar{C}_1 J_\xi(x_1) + \bar{C}_2 Y_\xi(x_1)\right]dx_1 + \frac{C_o\pi}{2}\int_{\beta a}^{x}\left[-J_\xi(x_1)\int_{\beta a}^{x_1} Y_\xi(x_2)dx_2 + \right. \\ \left. + Y_\xi(x_1)\int_{\beta a}^{x} J_\xi(x_2)dx_2\right]dx_1 + F_o, \end{gathered} \tag{4.4}$$

где $\beta^2 = \dfrac{Eh}{1+\nu}\dfrac{\alpha T\bar{\lambda}^2}{(1+\bar{\lambda}^2\nu^*)D}$, $\xi^2 = 1+\beta^2 b^2$, $\beta r = x$, $b \le r \le a$.

Во втором случае при $T>0$ поперечное перемещение w удовлетворяет уравнению

$$\Delta\Delta w_1-\beta_1^2\left[\left(\frac{a^2}{r^2}-1\right)\frac{d^2w_1}{dr^2}-\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\frac{1}{r}\frac{dw_1}{dr}\right]=0, \tag{4.5}$$

общее решение которого имеет вид

$$w_1=\int_{\beta_1 b}^{x_1}\left[E_1J_{\xi_1}(x)+E_2Y_{\xi_1}(x)\right]dx+\frac{H_o\pi}{2}\int_{\beta_1 b}^{x_1}\left[-J_{\xi_1}(x_2)dx_2+\right.$$
$$\left.+Y_{\xi_1}(x)\int_{\beta_1 b}^{x}J_{\xi_1}(x_2)dx_2\right]dx+E_o, \tag{4.6}$$

где $\beta_1^2=\dfrac{Eh}{1+\nu}\dfrac{\alpha T\lambda^2}{(1+\lambda^2\nu^*)D}$, $\xi_1^2=1+\beta_1^2a^2$, $\beta_1 r=x_1$, $\beta\le r\le a$.

При $T<0$ для w получим уравнение

$$\Delta\Delta w_2+\beta_2^2\left[\left(\frac{a^2}{r^2}-1\right)\frac{d^2w_2}{dr^2}-\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\frac{1}{r}\frac{dw_2}{dr}\right]=0, \tag{4.7}$$

общее решение которого имеет вид

$$w_2=\int_{\beta_2 b}^{x_2}\left[A_1I_\eta(x_1)+A_2K_\eta(x_1)\right]dx_1+F_o\int_{\beta_2 b}^{x_2}\left[I_\eta(x_1)\int_{\beta_2 b}^{x_1}\left[K_\eta(x)dx-\right.\right.$$
$$\left.-K_\eta(x_1)\int_{\beta_2 b}^{x_1}I_\eta(x)dx\right]dx_1+A_o, \tag{4.8}$$

где $\beta_2^2=-\dfrac{Eh}{1+\nu}\dfrac{\alpha T\lambda^2}{(1+\lambda^2\nu^*)D}$, $\eta^2=1-a^2\beta_2^2$, $\beta_2 r=x_2$, $b\le r\le a$.

Допустим, что в первом и втором случаях, когда $T>0$, поперечные перемещения w, определяемые по формулам (4.4) и (4.6), на контурах $r=b$ и $r=a$ удовлетворяют следующим граничным условиям.

1. Контур $r=a$ защемлен, $r=b$ свободен:

$$w=0,\qquad w'=0\qquad \text{при}\qquad x=\beta a,$$
$$xz'+\nu z=0,\quad x^2z''+xz'-z=0\quad \text{при}\quad x=\beta b, \tag{4.9}$$

2. Контур $r=a$ свободен, $r=b$ защемлен:

$$x_1z'+\nu z=0,\quad x_1^2z''+x_1z'-z=0\quad \text{при}\quad x_1=\beta_1 a,$$
$$w=0,\qquad w'=0\qquad \text{при}\qquad x_1=\beta_1 b. \tag{4.10}$$

Удовлетворяя условиям (4.9) и (4.10), для постоянных интегрирования получаем системы линейных однородных уравнений. Из условия существования нетривиального решения этих систем получим следующие уравнения:

в первом случае

$$\frac{(\xi+\nu)Y_{\xi}(\beta b)-\beta b Y_{\xi+1}(\beta b)}{(\xi+\nu)J_{\xi}(\beta b)-\beta b J_{\xi+1}(\beta b)}=\frac{Y_{\xi}(\beta a)}{J_{\xi}(\beta a)}, \tag{4.11}$$

во втором случае

$$\frac{(\xi_1+\nu)Y_{\xi_1}(\beta_1 a)-\beta_1 a Y_{\xi_1+1}(\beta_1 a)}{(\xi_1+\nu)J_{\xi_1}(\beta_1 a)-\beta_1 a J_{\xi_1+1}(\beta_1 a)}=\frac{Y_{\xi_1}(\beta_1 b)}{J_{\xi_1}(\beta_1 b)}. \tag{4.12}$$

Критическое значение температуры определяется как минимальный положительный корень уравнений (4.11) и (4.12) относительно T..

Министерство науки и образования РА
Русско-Армянский (Славянский) государственный университет (РАУ)

Ա.Ս. Ավետիսյան, Դ.Ռ. Ալեքսանյան

Բաղադրյալ շրջանային օղակաձև սալի ջերմաառաձգական կայունության մի խնդրի մասին

Դիտարկված է բաղադրյալ շրջանային օղակաձև սալ, որը բաղկացած է նյութերի տարբեր ֆիզիկամեխանիկական բնութագրիչներ ունեցող շրջանային օղակաձև երկու մասից, որոնք իրար միացած են ընդհանուր շրջանագծային եզրով մի որևէ նախնական ջերմաստիճանում: Սալում լարումներն ու դեֆորմացիաները, ինչպես նաև սալի հետագայում հարթ ձևի կայունության կորստի հնարավորությունն առաջանում են, երբ սալը ենթարկվում է ջերմաստիճանային հավասարաչափ փոփոխության:

A.S. Avetisyan, D.R. Aleksanyan

The Thermo-elastic Stability Problem of the Composite Circular Ring Plate

A composite circular ring plate is considered, which consists of two parts with different physical-mechanical composites and are connected with a general contour at a preliminary temperature. In the plate tensions and resilience as well as the lose possibility of the plain form stability appear when the plate undergoes the evenly change of temperature.

Литература

1. *Огибалов П.М., Грибанов В.Ф.* Термоустойчивость пластин и оболочек. Изд. МГУ. 1968. 518 с.

2. *Боли Б., Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений. М. Мир. 1964. 517 с.

3. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М. Наука. 1975. 575 с.

4. *Алексанян Р.К., Мкртчян Ц.А.* – Механика. Межвуз. сб. научн. труд. вып. 4 Изд. ЕГУ. Ереван. 1986. С. 57-66.

5. *Ватсон Г.* Теория бесселевых функций. М. ИЛ. 1949. 798 с.