

МЕХАНИКА

УДК 539.3

М. В. Белубекян, Э. В. Мартиросян

Щелевые магнитоупругие сдвиговые волны в косом магнитном поле

(Представлено академиком С.А. Амбарцумяном 14/XI 2005)

Ключевые слова: сдвиговые, щелевые волны, магнитное поле, идеальный проводник

Пусть имеются два идеально проводящих полупространства с различными упругими свойствами, разделенных щелью вакуума шириной $2h$. Прямоугольная декартова система координат выбирается так, чтобы плоскость $(x_1 0 x_3)$ находилась на расстоянии h между плоскостями, ограничивающими полупространства, а ось $0x_2$ была направлена по нормали к поверхностям полупространств. В начальном невозмущенном состоянии во всем пространстве предполагается наличие постоянного магнитного поля, вектор напряженности $\vec{H}_0$ которого параллелен плоскости $(x_1 0 x_2)$:

$$\vec{H}_0 = H_{01} \vec{i} + H_{02} \vec{j},$$

где $\vec{i}, \vec{j}$ – орты осей x_1, x_2 , соответственно. Задача состоит в изучении вопроса существования локализованной в щели поверхностной сдвиговой волны.

Отметим, что в случае поперечного магнитного поля, т.е. когда $H_{01} = 0$, поставленная задача исследовалась в [1]. Для косого магнитного поля другие задачи магнитоупругих поверхностных волн рассмотрены в работах [2], [3].

В случае антиплоской упругой деформации $u_j = v_j = 0, w_j = w_j(x_1, x_2, t)$, $j = 1, 2$, а также при предположении, что все искомые величины возмущенного электромагнитного поля не зависят от координаты x_3 , линеаризованные уравнения магнитоупругости [4] имеют вид

$$(C_{ij}^2 + V_{1j}^2) \frac{\partial^2 w_j}{\partial x_1^2} + (C_{ij}^2 + V_{2j}^2) \frac{\partial^2 w_j}{\partial x_2^2} + 2V_{1j}V_{2j} \frac{\partial^2 w_j}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 w_j}{\partial t^2}, \quad j=1,2, \quad (1)$$

где

$$V_{kj}^2 = \frac{\mu_j}{4\pi\rho_j} H_{0k}^2, \quad k=1,2,$$

$C_{ij}^2 = G_j/\rho_j$, G_j - коэффициент Ляме, ρ_j - плотность среды, μ_j - ее магнитная проницаемость. Здесь значения индекса $j=1,2$ соответствуют областям, занимаемым полупространствами $x_2 > h$ и $x_2 < -h$.

Уравнения электродинамики для возмущенного электромагнитного поля в щели $|x_2| < h$ приводятся к виду

$$c^2 \Delta h_3 = \frac{\partial^2 h_3}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial e_1}{\partial t} = c \frac{\partial h_3}{\partial x_2}, \quad (2)$$

где e_1 - компонента вектора напряженности возмущенного электрического поля ($e_2 = e_3 = 0$), h_3 - компонента вектора напряженности возмущенного магнитного поля ($h_1 = h_2 = 0$), Δ - оператор Лапласа, c - электродинамическая постоянная, равная скорости света в вакууме.

На плоскостях $x_2 = \pm h$ решения уравнений (1), (2) должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\left(G_j + \frac{\mu_j}{4\pi} H_{02}^2 \right) \frac{\partial w_j}{\partial x_2} + \frac{\mu_j}{4\pi} H_{01} H_{02} \frac{\partial w_j}{\partial x_1} = \frac{1}{4\pi} H_{02} h_3, \\ \frac{\mu_j}{c} H_{02} \frac{\partial w_j}{\partial t} = e_1, \quad j=1,2. \quad (3)$$

Первое из условий (3) означает, что на плоскостях $x_2 = \pm h$ выполняются граничные условия типа свободной границы [4-6]. Второе условие из (3) обеспечивает непрерывность тангенциальной компоненты напряженности e_1 возмущенного электрического поля при переходе через границы $x_2 = \pm h$.

Решения типа поверхностной волны, локализованной в щели $|x_2| < h$, должны удовлетворять также следующим условиям затухания:

$$\lim_{x_1 \rightarrow +\infty} w_1 = 0, \quad \lim_{x_2 \rightarrow -\infty} w_2 = 0 \quad (4)$$

Таким образом, исследуемая задача сводится к решению уравнений (1), (2), удовлетворяющих условиям (3), (4).

Решения уравнений (1), (2) будем искать в виде гармонических волн вида $g(x_2) \exp(i(\omega t - kx_1))$ с частотой ω и волновым числом k , где g - достаточно гладкая неизвестная функция на оси. Нетрудно видеть, что решения уравнений (1), удовлетворяющие условиям затухания (4), имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}w_1 &= A_1 \exp(-kp_1 x_2) \exp(i(\omega t - kx_1 + k\alpha_1 x_2)), \\w_2 &= A_2 \exp(kp_2 x_2) \exp(i(\omega t - kx_1 + k\alpha_2 x_2)),\end{aligned}\quad (5)$$

где A_1, A_2 – произвольные постоянные и

$$\eta = \frac{\omega^2}{k^2}, \quad p_j^2 = \frac{C_{ij}^2 + V_{1j}^2 - \eta}{C_{ij}^2 + V_{2j}^2} - \alpha_j^2, \quad p_j > 0, \quad \alpha_j = \frac{V_{1j} V_{2j}}{C_{ij}^2 + V_{2j}^2}, \quad j = 1, 2.$$

Согласно условиям затухания (4) характеристика η квадрата фазовой скорости волны должна удовлетворять условию:

$$0 < \eta < \eta^* = \min(\eta_1, \eta_2), \quad (6)$$

где $\eta_j = C_{ij}^2 + V_{1j}^2 - \alpha_j^2 (C_{ij}^2 + V_{2j}^2)$, $j = 1, 2$.

Аналогично решения уравнений (2) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}h_3 &= \left(B \exp(-kx_2 \sqrt{1 - \eta/c^2}) + C \exp(kx_2 \sqrt{1 - \eta/c^2}) \right) \exp(i(\omega t - kx_1)), \\e_1 &= -\frac{ck}{i\omega} \sqrt{1 - \eta/c^2} \exp(i(\omega t - kx_1)) \left(B \exp(-kx_2 \sqrt{1 - \eta/c^2}) - C \exp(kx_2 \sqrt{1 - \eta/c^2}) \right),\end{aligned}\quad (7)$$

где B, C – произвольные постоянные.

Для нахождения произвольных постоянных A_1, A_2, B, C используем граничные условия (3). Подставляя из (5), (7) значения w_1, w_2, h_3, e_1 в граничные условия (3), получим линейную однородную систему из четырех уравнений относительно постоянных A_1, A_2, B, C :

$$\begin{aligned}\left(G_1 + \frac{\mu_1}{4\pi} H_{02}^2 \right) k A_1 (i\alpha_1 - p_1) \exp(kh(i\alpha_1 - p_1)) - \frac{\mu_1}{4\pi} H_{01} H_{02} A_1 k i \exp(kh(i\alpha_1 - p_1)) = \\= \frac{1}{4\pi} H_{02} \left(B \exp(-kh \sqrt{1 - \eta/c^2}) + C \exp(kh \sqrt{1 - \mu/c^2}) \right), \\ \frac{\mu_1 \omega^2}{c^2 k} H_{02} A_1 \exp(kh(i\alpha_1 - p_1)) = \sqrt{1 - \eta/c^2} \left(B \exp(-kh \sqrt{1 - \eta/c^2}) - C \exp(kh \sqrt{1 - \eta/c^2}) \right), \\ \left(G_2 + \frac{\mu_2}{4\pi} H_{02}^2 \right) k A_2 (i\alpha_2 + p_2) \exp(-kh(i\alpha_2 + p_2)) - \frac{\mu_2}{4\pi} H_{01} H_{02} A_2 k i \exp(-kh(i\alpha_2 + p_2)) = \\= \frac{1}{4\pi} H_{02} \left(B \exp(kh \sqrt{1 - \eta/c^2}) + C \exp(-kh \sqrt{1 - \eta/c^2}) \right), \\ \frac{\mu_2 \omega^2}{c^2 k} H_{02} A_2 \exp(-kh(i\alpha_2 + p_2)) = \sqrt{1 - \eta/c^2} \left(B \exp(kh \sqrt{1 - \eta/c^2}) - C \exp(-kh \sqrt{1 - \eta/c^2}) \right).\end{aligned}$$

Подставляя значения A_1, A_2 из первого и третьего уравнений соответственно во второе и четвертое, получим линейную однородную систему относительно неизвестных B, C

$$\begin{aligned}-d_1 \left(B \exp(-kh \sqrt{1 - \eta/c^2}) + C \exp(kh \sqrt{1 - \eta/c^2}) \right) = B \exp(-kh \sqrt{1 - \eta/c^2}) - \\ - C \exp(kh \sqrt{1 - \mu/c^2}),\end{aligned}$$

$$d_2 \left(B \exp \left(kh \sqrt{1 - \eta/c^2} \right) + C \exp \left(-kh \sqrt{1 - \eta/c^2} \right) \right) = B \exp \left(kh \sqrt{1 - \eta/c^2} \right) - C \exp \left(-kh \sqrt{1 - \mu/c^2} \right)$$

или равносильно

$$\begin{aligned} (1 + d_1) B \exp \left(-kh \sqrt{1 - \eta/c^2} \right) + (d_1 - 1) C \exp \left(kh \sqrt{1 - \eta/c^2} \right) &= 0, \\ (1 - d_2) B \exp \left(kh \sqrt{1 - \eta/c^2} \right) - (1 + d_2) C \exp \left(-kh \sqrt{1 - \eta/c^2} \right) &= 0, \end{aligned}$$

где обозначено

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\mu_1 \omega^2 H_{02}^2}{4\pi c^2 k^2 \sqrt{1 - \eta/c^2} \left[\left(G_1 + \frac{\mu_1}{4\pi} H_{02}^2 \right) (p_1 - i\alpha_1) + \frac{\mu_1}{4\pi} i H_{01} H_{02} \right]}, \\ d_2 &= \frac{\mu_2 \omega^2 H_{02}^2}{4\pi c^2 k^2 \sqrt{1 - \mu/c^2} \left[\left(G_2 + \frac{\mu_2}{4\pi} H_{02}^2 \right) (p_2 + i\alpha_2) - \frac{\mu_2}{4\pi} i H_{01} H_{02} \right]} \end{aligned}$$

Отметим, что

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\eta V_{21}^2}{c^2 \sqrt{1 - \eta/c^2} \left[(C_{11}^2 + V_{21}^2) (p_1 - i\alpha_1) + i V_{11} V_{21} \right]} = \frac{\eta V_{21}^2}{c^2 p_1 \sqrt{1 - \eta/c^2} (C_{11}^2 + V_{21}^2)}, \\ d_2 &= \frac{\eta V_{22}^2}{c^2 \sqrt{1 - \eta/c^2} \left[(C_{12}^2 + V_{22}^2) (p_2 + i\alpha_2) - i V_{12} V_{22} \right]} = \frac{\eta V_{22}^2}{c^2 p_2 \sqrt{1 - \eta/c^2} (C_{12}^2 + V_{22}^2)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Приравнявая нулю определитель системы относительно неизвестных B, C , получим дисперсионное уравнение задачи:

$$-(1 + d_1)(1 + d_2) \exp \left(-2kh \sqrt{1 - \eta/c^2} \right) + (1 - d_1)(1 - d_2) \exp \left(2kh \sqrt{1 - \eta/c^2} \right) = 0, \quad 0 < \eta < \eta^*,$$

$$\text{т. е.} \quad (1 + d_1 d_2) \operatorname{th} \left(2kh \sqrt{1 - \eta/c^2} \right) = d_1 + d_2, \quad 0 < \eta < \eta^*.$$

Подставляя здесь значения d_1, d_2 из (8), найдем окончательный вид дисперсионного уравнения:

$$\left[p_1 p_2 (1 - \eta/c^2) + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \eta^2 \right] \operatorname{th} \left(2kh \sqrt{1 - \eta/c^2} \right) = \eta \sqrt{1 - \eta/c^2} (\varepsilon_1 p_2 + \varepsilon_2 p_1), \quad 0 < \eta < \eta^*, \quad (9)$$

где

$$\varepsilon_j = \frac{V_{2j}^2}{c^2 (C_{1j}^2 + V_{2j}^2)}, \quad j = 1, 2.$$

Замечая, что величина $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ очень мала по сравнению с $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, заменим дисперсионное уравнение (9) приближенным уравнением

$$p_1 p_2 \sqrt{1 - \eta/c^2} \operatorname{th} \left(2kh \sqrt{1 - \eta/c^2} \right) = \eta (\varepsilon_1 p_2 + \varepsilon_2 p_1), \quad 0 < \eta < \eta^* \quad (10)$$

Пусть $H_{02} = 0$, т.е. вектор напряженности $\vec{H}_0$ магнитного поля направлен вдоль оси x_1 . Тогда $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ и, как легко видеть, уравнение (9)

не имеет корней в интервале $(0, \eta^*)$. Итак, в этом случае щелевой магнитоупругой сдвиговой волны не существует.

Пусть теперь $H_{02} \neq 0$, тогда $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$. В этой ситуации докажем, что уравнение (10) всегда имеет корень в интервале $(0, \eta^*)$. В самом деле, так как $p_1(\eta_1) = p_2(\eta_2) = 0$ и $\eta^* = \min(\eta_1, \eta_2)$, то без ограничения общности можно считать, что $p_1(\eta^*) = 0$. Рассмотрим на отрезке $[0, \eta^*]$ функцию

$$F(\eta) = p_1 \sqrt{1 - \eta/c^2} \operatorname{th}(2kh \sqrt{1 - \eta/c^2}) - \eta \left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \frac{p_1}{p_2} \right).$$

Легко проверить, что F непрерывна на отрезке $[0, \eta^*]$, причем

$$F(0) = p_1(0) \operatorname{th}(2kh) > 0, \quad F(\eta^*) \leq -\varepsilon_1 \eta^* < 0.$$

Следовательно, согласно теореме Больцано-Коши равносильное (10) уравнение $F(\eta) = 0$ имеет корень в интервале $(0, \eta^*)$.

Таким образом, если $H_{02} \neq 0$, то в рассматриваемой постановке магнитоупругая локализованная в щели сдвиговая волна существует.

Рассмотрим два предельных случая уравнения (10). Пусть сперва $kh \rightarrow \infty$ (коротковолновое приближение или же расстояние между полупространствами очень большое). Тогда имеем $\operatorname{th}(2kh \sqrt{1 - \eta/c^2}) \rightarrow 1$ и из (10) получим предельное уравнение:

$$p_1 p_2 \sqrt{1 - \eta/c^2} = \eta (\varepsilon_1 p_2 + \varepsilon_2 p_1), \quad 0 < \eta < \eta^*. \quad (11)$$

В частности, если полупространства имеют одинаковые физико-механические свойства ($\varepsilon_j = \varepsilon, p_j = p, j = 1, 2$), то уравнение (11) упрощается и сводится к дисперсионному уравнению для поверхностной сдвиговой волны вдоль границы полупространства [3]

$$p \sqrt{1 - \eta/c^2} = 2\varepsilon \eta, \quad 0 < \eta < \eta^*.$$

Пусть теперь $kh \rightarrow 0$ (длинноволновое приближение или узкая щель между полупространствами). Тогда имеем $\operatorname{th}(2kh \sqrt{1 - \eta/c^2}) \sim 2kh \sqrt{1 - \eta/c^2}$ и из (10) получим предельное уравнение:

$$p_1 p_2 (1 - \eta/c^2) = \frac{\eta}{2kh} (\varepsilon_1 p_2 + \varepsilon_2 p_1), \quad 0 < \eta < \eta^*. \quad (12)$$

С целью числовых расчетов преобразуем уравнение (12). Вводя безразмерные величины

$$a = \frac{\omega^2}{k^2 C_{11}^2}, \quad \theta_{ij} = \frac{V_{1j}^2}{C_{ij}^2}, \quad \theta_{ij} = \frac{V_{2j}^2}{C_{ij}^2}, \quad \lambda_j = \frac{C_{ij}^2}{c^2} \quad (j = 1, 2),$$

будем иметь формулы:

$$p_1^2 = \frac{1+\theta_{11}-a}{1+\theta_{11}} \frac{\theta_{11}\theta_{11}}{(1+\theta_{11})^2}, \quad p_2^2 = \frac{1+\theta_{12}-a(\lambda_1/\lambda_2)}{1+\theta_{12}} \frac{\theta_{12}\theta_{12}}{(1+\theta_{12})^2}, \quad \varepsilon_1 = \frac{\theta_{11}}{c^2(1+\theta_{11})},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\theta_{12}}{c^2(1+\theta_{12})}, \quad \eta_1 = \frac{1+\theta_{11}+\theta_{11}}{1+\theta_{11}}, \quad \eta_2 = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \frac{1+\theta_{12}+\theta_{12}}{1+\theta_{12}}.$$

Уравнение (12) примет следующий вид :

$$p_1 p_2 (1-\lambda_1 a) = \frac{a}{2kh} \lambda_1 \left(\frac{\theta_{11} p_2}{1+\theta_{11}} + \frac{\theta_{12} p_1}{1+\theta_{12}} \right), \quad 0 < a < \eta^*. \quad (13)$$

В случае полупространств с одинаковыми физико-механическими свойствами ($\lambda_j = \lambda, \theta_{ij} = \theta_i, \theta_{ji} = \theta_i, p_j = p, j=1,2$) уравнение (13) упрощается и сводится к такому:

$$p(1-\lambda a) = \frac{a\lambda\theta_i}{kh(1+\theta_i)}, \quad 0 < a < \eta^*, \quad \text{где} \quad \eta^* = 1 + \frac{\theta_i}{1+\theta_i} \quad (14)$$

Некоторые численные значения величины a , полученные решением уравнения (14), приведены в таблице ниже.

θ_i	θ_i	λ	kh	a
0	$2 \cdot 10^{-1}$	10^{-8}	10^{-6}	$1 - 3.3 \cdot 10^{-6}$
0	$2 \cdot 10^{-1}$	10^{-8}	10^{-7}	$1 - 3.3 \cdot 10^{-4}$
0	$2 \cdot 10^{-1}$	10^{-8}	10^{-8}	$1 - 3.3 \cdot 10^{-2}$
10^{-2}	$2 \cdot 10^{-1}$	10^{-8}	10^{-6}	$1.0083 - 3.4 \cdot 10^{-6}$
10^{-2}	$2 \cdot 10^{-1}$	10^{-8}	10^{-7}	$1.0083 - 3.4 \cdot 10^{-4}$
10^{-2}	$2 \cdot 10^{-1}$	10^{-8}	10^{-8}	$1.0083 - 3.4 \cdot 10^{-2}$
$2 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-1}$	10^{-8}	10^{-6}	$1.0167 - 3.5 \cdot 10^{-6}$
$2 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-1}$	10^{-8}	10^{-7}	$1.0167 - 3.5 \cdot 10^{-4}$
$2 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-1}$	10^{-8}	10^{-8}	$1.0167 - 3.5 \cdot 10^{-2}$
$5 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-1}$	10^{-8}	10^{-6}	$1.0417 - 3.7 \cdot 10^{-6}$
$5 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-1}$	10^{-8}	10^{-7}	$1.0417 - 3.7 \cdot 10^{-4}$
$5 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-1}$	10^{-8}	10^{-8}	$1.0417 - 3.7 \cdot 10^{-2}$
$8 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-1}$	10^{-8}	10^{-6}	$1.0667 - 3.9 \cdot 10^{-6}$
$8 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-1}$	10^{-8}	10^{-7}	$1.0667 - 3.9 \cdot 10^{-4}$
$8 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-1}$	10^{-8}	10^{-8}	$1.0667 - 3.9 \cdot 10^{-2}$
10^{-1}	$2 \cdot 10^{-1}$	10^{-8}	10^{-6}	$1.0833 - 4 \cdot 10^{-6}$
10^{-1}	$2 \cdot 10^{-1}$	10^{-8}	10^{-7}	$1.0833 - 4 \cdot 10^{-4}$
10^{-1}	$2 \cdot 10^{-1}$	10^{-8}	10^{-8}	$1.0833 - 4 \cdot 10^{-2}$

Примечания: θ_i — продольное магнитное поле, θ_i — поперечное магнитное поле. Влияние уменьшается при возрастании θ_i .

Ճեղքավոր մագնիսաառանձգական սահքի ալիքներ թեք մագնիսաան դաշտում

Դիսպարկվում են երկու կիսապարամություններ առանձգական իդեալապես հաղորդիչ նյութերից, որոնք անջատվում են իրարից վակուումի ճեղքով: Արտաքին հասպարտուն մագնիսական դաշտի առկայությունը, որը գործում է կիսապարամությունների եզրերին ուղղահայաց հարթությունում, ապահովում է փոխազդեցությունը զրգոված էլեկտրա-մագնիսական դաշտի և կիսապարամությունների առանձգական տեղափոխությունների դաշտերի միջև: Ցույց է տրվում որ նշված փոխազդեցությունը բերում է ճեղքում տեղայնացված մակերևութային սահքի ալիքների առաջացմանը:

M. V. Belubekyan, E. V. Martirosyan

Splitting Magnetoelastic Shifting Waves in Slant Magnetic Field

We consider a system of two elastic perfectly conducting semi - spaces which separated by vacuum split. There is external constant magnetic field acting in a plane that perpendicular to the boundaries of semi - spaces. It shown that the interaction between indignant electromagnetic field and fields of elastic displacements of semi - spaces becomes to existence of surface shifting waves located in the split.

Литература

1. Белубекян М. В. В сб.: Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Изд-во АН АрмССР. Ереван. 1984. С. 70 — 74.
2. Chakraborty S., Chattopadhyay M. — Journal of Applied Mechanics (Trans. of the ASME). 1998, V. 65. N 2. P. 535 — 539.
3. Мартиросян Э. В. — Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т. 57. N 1. 63 — 69.
4. Kaliski S., Rogula D. — Proc. of Vibr. Probl. 1960. N 5. P.63 — 80.
5. Геворкян А. В., Казарян К. Б. В сб.: Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Изд-во АН АрмССР. Ереван. 1984. С. 111 — 115.
6. Геворкян А. В. В сб.: Исследования по механике твердого деформируемого тела. Изд-во АН АрмССР. Ереван. 1981. С. 81 — 86.