ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том 106 2006 № 2

МЕХАНИКА

УДК 539.1

А. Н. Мартиросян, Г.А. Мартиросян, К.С. Костандян

Задача об импульсах на границах полубесконечных трещин

(Представлено чл.-кор. НАН РА А.Г. Багдоевым 28/IX 2005)

Ключевые слова: *уравнение Винера - Хопфа, смешанная граничная задача, система Фредгольма*

Рассматривается плоская задача о движении изотропной упругой среды при наличии полубесконечной трещины, причем верхние и нижние полуплоскости имеют разные упругие постоянные, соответственно (λ, μ, ρ) и $(\lambda_1, \mu_1, \rho_1)$. В начальный момент времени на обоих берегах разреза в некоторой точке действуют мгновенные сосредоточенные нормальные и касательные импульсы. Эта задача со смешанными граничными условиями на плоскости решается методом интегральных преобразований Лапласа и Фурье с решением системы уравнений Винера - Хопфа, обращением интегральных преобразований с приведением решения к форме Смирнова - Соболева. Найдены коэффициенты интенсивности напряжений для трещины.

Обозначим U, V и U_1, V_1 компоненты перемещений в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$; a, b и a_1, b_1 скорости упругих волн в верхней и нижней полуплоскостях соответственно.

Уравнения движения в перемещениях для изотропной среды в плоском случае при $y > 0$ имеют вид

$$a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + b^2\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + (a^2 - b^2)\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2},$$
$$a^2\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + b^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (a^2 - b^2)\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \quad (1)$$

а при $y < 0$

$$a_1^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + b_1^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} + (a_1^2 - b_1^2) \frac{\partial^2 V_1}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2},$$
$$a_1^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} + b_1^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + (a_1^2 - b_1^2) \frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2}, \qquad (2)$$

где $a^2 = \dfrac{\lambda + 2\mu}{\rho}$, $b^2 = \dfrac{\mu}{\rho}$ и $a_1^2 = \dfrac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\rho_1}$, $b_1^2 = \dfrac{\mu_1}{\rho_1}$.

Рассмотрим следующую сингулярную граничную задачу для полубесконечного разреза ($y = 0$):

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{yy} &= \rho \left(K \frac{\partial U}{\partial x} + a^2 \frac{\partial V}{\partial y} \right) = P\delta(x + l)\delta(t) \\
\sigma_{1yy} &= \rho_1 \left(K_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + a_1^2 \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) = P_1\delta(x + l)\delta(t) \\
\sigma_{xy} &= b^2 \rho \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) = Q\delta(x + l)\delta(t) \\
\sigma_{1xy} &= b_1^2 \rho_1 \left(\frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial V_1}{\partial x} \right) = Q_1\delta(x + l)\delta(t)
\end{aligned}\right\} x < 0, \qquad (3)$$

$$\left.\begin{aligned}
U = U_1,\ V = V_1,\ b^2 \rho \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) &= b_1^2 \rho_1 \left(\frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial V_1}{\partial x} \right) \\
\rho \left(K \frac{\partial U}{\partial x} + a^2 \frac{\partial V}{\partial y} \right) &= \rho_1 \left(K_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + a_1^2 \frac{\partial V_1}{\partial y} \right)
\end{aligned}\right\} x > 0,$$

$$K = a^2 - 2b^2,\ K_1 = a_1^2 - 2b_1^2,$$

$U, V, U_1, V_1 = O(r^{1/2})$, $r = \sqrt{x^2 + y^2} \to 0$ (условие на ребре).

Здесь $\delta(x)$ есть дельта-функция, t-время. Переходя к преобразованиям Лапласа $\overline{U}, \overline{V}, \overline{U_1}, \overline{V_1}$ от U, V, U_1, V_1 по t, ищем решение для $\overline{U}, \overline{V}, \overline{U_1}, \overline{V_1}$ в виде

$$\overline{U}, \overline{V} = \sum_{n=1}^{2} \int_{-\infty}^{\infty} A_n, B_n \exp[i\overline{\alpha}x + i\overline{\gamma}_n y] d\overline{\alpha},$$
$$\overline{U_1}, \overline{V_1} = \sum_{n=1}^{2} \int_{-\infty}^{\infty} C_n, D_n \exp[i\overline{\alpha}x + i\overline{\beta}_n y] d\overline{\alpha}, \qquad (4)$$

$$B_n = \frac{a^2\overline{\gamma}_1^2 - b^2\overline{\gamma}_n^2}{(a^2 - b^2)\overline{\alpha}\overline{\gamma}_n} A_n,\ D_n = \frac{a_1^2\overline{\beta}_1^2 - b_1^2\overline{\beta}_n^2}{(a_1^2 - b_1^2)\overline{\alpha}\overline{\beta}_n} C_n,\ \overline{\gamma}_n = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_n^2} - \overline{\alpha}^2},$$

$$\overline{\beta}_n = -\sqrt{\frac{\omega^2}{c_{1n}^2} - \overline{\alpha}^2}, c_1 = a,\ c_2 = b,\ c_{11} = a_1,\ c_{21} = b_1.$$

В плоскости $\overline{\alpha}$ проведены разрезы между точками ветвления $\pm\dfrac{\overline{\omega}}{c_n}$, $\pm\dfrac{\overline{\omega}}{c_{1n}}$ и выбраны значения радикалов.

Подставляя (4) в (3) и проводя обратное преобразование Фурье по x, можно получить систему уравнений Винера - Хопфа:

$$b_{11}\frac{\sigma_{xy}^-}{\overline{\gamma}_2^-}+b_{12}\frac{\sigma_{yy}^-}{\overline{\gamma}_2^-}+iU^+\overline{\gamma}_2^++d_1=0,$$
$$b_{21}\frac{\sigma_{xy}^-}{\overline{\gamma}_2^-}+b_{22}\frac{\sigma_{yy}^-}{\overline{\gamma}_2^-}+iV^+\overline{\gamma}_2^++d_2=0, \tag{5}$$

$$b_{11}=-\frac{\omega^2\overline{\gamma}_2^2}{\rho b^4R(\overline{\alpha})}+\frac{\overline{\beta}_2\overline{\gamma}_2\omega^2}{\rho_1 b_1^4R_1(\overline{\alpha})},\quad b_{22}=-\frac{\omega^2\overline{\gamma}_1\overline{\gamma}_2}{\rho b^4R(\overline{\alpha})}-\frac{\omega^2\overline{\beta}_1\overline{\gamma}_2}{\rho_1 b_1^4R_1(\overline{\alpha})},$$

$$b_{12}=b_{21}=\frac{2\overline{\gamma}_1\overline{\gamma}_2-\overline{\chi}}{\rho b^2R(\overline{\alpha})}\overline{\alpha}\overline{\gamma}_2-\frac{2\overline{\beta}_1\overline{\beta}_2-\overline{\chi}_1}{\rho_1 b_1^2R_1(\overline{\alpha})}\overline{\alpha}\overline{\gamma}_2,\qquad \begin{aligned}R(\overline{\alpha})&=\overline{\chi}^2+4\overline{\alpha}^2\overline{\gamma}_1\overline{\gamma}_2,\\ R_1(\overline{\alpha})&=\overline{\chi}_1^2+4\overline{\alpha}^2\overline{\beta}_1\overline{\beta}_2,\end{aligned}$$

$$d_1=\frac{\overline{\alpha}\overline{\gamma}_2^+(\overline{\gamma}_1\overline{\gamma}_2-\overline{\chi})Pe^{i\overline{\alpha}l}}{2\pi\rho b^2R(\overline{\alpha})}-\frac{\overline{\alpha}\overline{\gamma}_2^+(\overline{\beta}_1\overline{\beta}_2-\overline{\chi_1})P_1e^{i\overline{\alpha}l}}{2\pi\rho_1 b_1^2R_1(\overline{\alpha})}-\frac{\overline{\gamma}_2\overline{\gamma}_2^+\omega^2Qe^{i\overline{\alpha}l}}{2\pi\rho b^4R(\overline{\alpha})}+\frac{\overline{\beta}_2\overline{\gamma}_2^+\omega^2Q_1e^{i\overline{\alpha}l}}{2\pi\rho_1 b_1^2R_1(\overline{\alpha})};$$

$$d_2=\frac{\omega^2\overline{\gamma}_1\overline{\gamma}_2^+Pe^{i\overline{\alpha}l}}{2\pi\rho b^4R(\overline{\alpha})}+\frac{(2\overline{\gamma}_1\overline{\gamma}_2-\overline{\chi})\overline{\alpha}\overline{\gamma}_2^+Qe^{i\overline{\alpha}l}}{2\pi\rho b^2R(\overline{\alpha})}-\frac{\overline{\gamma}_2^+\omega^2\overline{\beta}_1P_1e^{i\overline{\alpha}l}}{2\pi\rho_1 b_1^4R_1(\overline{\alpha})}-\frac{(2\overline{\beta}_1\overline{\beta}_2-\overline{\chi_1})\overline{\alpha}\overline{\gamma}_2^+Q_1e^{i\overline{\alpha}l}}{2\pi\rho_1 b_1^2R_1(\overline{\alpha})},$$

$$\sigma_{yy}^-=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-i\overline{\alpha}x}\overline{\sigma}_{yy}\Big|_{y=0}dx,\quad \sigma_{xy}^-=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-i\overline{\alpha}x}\overline{\sigma}_{xy}\Big|_{y=0}dx,$$

$$U^+=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^0 e^{-i\overline{\alpha}x}(\overline{U}-\overline{U}_1)\Big|_{y=0}dx,\quad V^+=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^0 e^{-i\overline{\alpha}x}(\overline{V}-\overline{V}_1)\Big|_{y=0}dx,$$

$$\overline{\gamma}_n^\pm=\sqrt{\frac{\omega}{c_n}\pm\overline{\alpha}},\quad \overline{\chi\alpha}=\frac{\omega^2}{b^2}-2\overline{\alpha}^2,\quad \overline{\chi}_1\overline{\alpha}=\frac{\omega^2}{b_1^2}-2\overline{\alpha}^2,$$

$$A_1=-\frac{i\overline{\alpha}\overline{\chi}}{b^2R(\overline{\alpha})}\left(\frac{Pe^{i\overline{\alpha}l}}{2\pi\rho}+\frac{\sigma_{yy}^-}{\rho}\right)-\frac{2\overline{\alpha}^2i\overline{\gamma}_2}{R(\overline{\alpha})}\left(\frac{Qe^{i\overline{\alpha}l}}{2\pi b^2\rho}+\frac{\sigma_{xy}^-}{\rho b^2}\right),$$
$$A_2=\frac{2i\overline{\alpha}\overline{\gamma}_1\overline{\gamma}_2}{b^2R(\overline{\alpha})}\left(\frac{Pe^{i\overline{\alpha}l}}{2\pi\rho}+\frac{\sigma_{yy}^-}{\rho}\right)-\frac{\overline{\chi}\overline{\gamma}_2}{R(\overline{\alpha})}\left(\frac{Qe^{i\overline{\alpha}l}}{2\pi\rho b^2}+\frac{\sigma_{xy}^-}{\rho b^2}\right).$$

Аналогичная формула получится для C_1 и C_2.

Отметим, что σ_{xy}^-, σ_{yy}^- и U^+,V^+ аналитические функции в нижней и верхней полуплоскости плоскости $\overline{\alpha}$.

Вводя величины

$$\Phi^+=\begin{pmatrix}iU^+\overline{\gamma}_2^+\\ -iV^+\overline{\gamma}_2^+\end{pmatrix},\quad \Phi^-=\begin{pmatrix}\dfrac{\sigma_{xy}^-}{\gamma_2^-}\\ \dfrac{\sigma_{yy}^-}{\gamma_2^-}\end{pmatrix},\quad g=\begin{pmatrix}-d_1\\ -d_2\end{pmatrix}, \tag{6}$$

можно получить матричное уравнение Винера - Хопфа

$$\Phi^+=G(\alpha)\Phi^-+g(\alpha), \tag{7}$$

где $G(\alpha) = \begin{pmatrix} -b_{11} & -b_{12} \\ -b_{21} & -b_{22} \end{pmatrix}$.

Решение задачи (7), ограниченное на бесконечности, дано в [3] в виде

$$\Phi(\alpha) = \frac{X(\overline{\alpha})}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(X^+(\zeta))^{-1} g(\zeta)}{\zeta - \overline{\alpha}} d\zeta, \tag{8}$$

где матрица-функция $X(\overline{\alpha})$ удовлетворяет однородным уравнениям

$$X^+(\overline{\alpha}) = G(\overline{\alpha}) X^-(\overline{\alpha}), \quad G(\overline{\alpha}) = X^+(\overline{\alpha})(X^-(\overline{\alpha}))^{-1}. \tag{9}$$

Как показано в [3], уравнение для $X^-(\overline{\alpha})$ можно записать в виде системы Фредгольма

$$X^-(\overline{\alpha}) - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{G^{-1}(\overline{\alpha}) G(\zeta) - E(\zeta)}{\zeta - \overline{\alpha}} X^-(\zeta) d\zeta = \gamma(\overline{\alpha}), \tag{10}$$

где $\gamma(\overline{\alpha})$ есть асимптотическое поведение $X^-(\overline{\alpha})$ при $\alpha \approx \infty$

$$X^-(\overline{\alpha}) - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\left\{ \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} - E \right\} \begin{pmatrix} y_{11}(\zeta) & y_{12}(\zeta) \\ y_{21}(\zeta) & y_{22}(\zeta) \end{pmatrix}}{\zeta - \overline{\alpha}} d\zeta = \gamma(\overline{\alpha}), \tag{11}$$

где $X^-(\overline{\alpha}) = \begin{pmatrix} y_{11}(\overline{\alpha}) & y_{12}(\overline{\alpha}) \\ y_{21}(\overline{\alpha}) & y_{22}(\overline{\alpha}) \end{pmatrix}$, E - единичная матрица.

$$\begin{aligned}
& b_{22}(\overline{\alpha}) b_{11}(\zeta) - b_{12}(\overline{\alpha}) b_{21}(\zeta) = c_{11} \Delta(\overline{\alpha}), \\
& b_{22}(\overline{\alpha}) b_{12}(\zeta) - b_{12}(\overline{\alpha}) b_{22}(\zeta) = c_{12} \Delta(\overline{\alpha}), \\
& -b_{21}(\overline{\alpha}) b_{11}(\zeta) - b_{11}(\overline{\alpha}) b_{21}(\zeta) = c_{21} \Delta(\overline{\alpha}), \\
& -b_{21}(\overline{\alpha}) b_{12}(\zeta) - b_{11}(\overline{\alpha}) b_{22}(\zeta) = c_{22} \Delta(\overline{\alpha}), \\
& \Delta(\overline{\alpha}) = b_{11}(\overline{\alpha}) b_{22}(\overline{\alpha}) - b_{12}(\overline{\alpha}) b_{21}(\overline{\alpha}).
\end{aligned} \tag{12}$$

Обозначим

$$X^+(\overline{\alpha}) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}^{-1} \tag{13}$$

Факторизация матрицы $G(\overline{\alpha})$ для больших $\overline{\alpha}$, для которых $\beta_{1,2} \approx -i\overline{\alpha}$, $\gamma_{1,2} \approx i\overline{\alpha}$, т.е. для случая рациональных коэффициентов, дана в [3] и имеет вид $G = X^+(\overline{\alpha})(X^-(\overline{\alpha}))^{-1}$, где можно считать $\overline{\alpha} \approx \infty$,

$$\begin{aligned}
& X^+(\overline{\alpha}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad X^-(\overline{\alpha}) = G^{-1}(\overline{\alpha}), \\
& G(\overline{\alpha}) = \begin{pmatrix} a_1' & a_0 \\ a_0 & -a_1' \end{pmatrix}, \quad G^{-1}(\overline{\alpha}) = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} a_1' & a_0 \\ a_0 & -a_1' \end{pmatrix}, \quad d = -a_1'^2 - a_0^2,
\end{aligned} \tag{14}$$

где $a_1' = \dfrac{a^2}{2\rho b^2(a^2-b^2)} + \dfrac{a_1^2}{2\rho_1 b_1^2(a_1^2-b_1^2)}$, $a_0 = \dfrac{i}{2\rho(a^2-b^2)} - \dfrac{i}{2\rho_1(a_1^2-b_1^2)}$,

при этом в (11) $\gamma(\overline{\alpha}) \approx X^-(\overline{\alpha})$, которая дается формулой (14).

Тогда (7) и (13) дают

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\sigma_{xy}^-}{\gamma_2^-} \\ \dfrac{\sigma_{yy}^-}{\gamma_2^-} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} M_1(\zeta) \\ M_2(\zeta) \end{pmatrix} \frac{d\zeta}{\zeta - \overline{\alpha}}, \tag{15}$$

где $M_1(\zeta) = \dfrac{a_1'}{d}(x_{11}(\zeta)d_1 + x_{12}(\zeta)d_2) + \dfrac{a_0}{d}(x_{21}(\zeta)d_1 + x_{22}(\zeta)d_2) = N_1(\zeta)e^{i\zeta l}$,

$M_2(\zeta) = \dfrac{a_0}{d}(x_{11}(\zeta)d_1 + x_{12}(\zeta)d_2) - \dfrac{a_1'}{d}(x_{21}(\zeta)d_1 + x_{22}(\zeta)d_2) = N_2(\zeta)e^{i\zeta l}$.

При $\overline{\alpha} \approx \infty$

$$\sigma_{xy}^- = \frac{\gamma_2^-(\overline{\alpha})}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} M_1(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - \overline{\alpha}}, \quad \sigma_{yy}^- = \frac{\gamma_2^-(\overline{\alpha})}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} M_2(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - \overline{\alpha}}, \tag{16}$$

Переходя к обратным преобразованиям Лапласа и Фурье, получим при $y = 0$, $x < 0$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= -\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} ds \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{s(t-\alpha x - \zeta l)} d\alpha \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\alpha}}{2\pi i}\frac{N_1(\zeta)}{\zeta - \alpha} d\zeta, \\ \sigma_{yy} &= -\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} ds \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{s(t-\alpha x - \zeta l)} d\alpha \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\alpha}}{2\pi i}\frac{N_2(\zeta)}{\zeta - \alpha} d\zeta, \end{aligned} \tag{17}$$

где заменены ζ на $\zeta\omega$, $\overline{\alpha}$ на $\alpha\omega$. Вычисляя интеграл по s в формуле (17) и затем интеграл по α, можно получить решения в форме Смирнова - Соболева

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= -\frac{1}{\pi} Re\, i \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{N_1(\zeta)\sqrt{t - \zeta l}}{\left(\zeta - \dfrac{t - \zeta l}{x}\right) x\sqrt{x}} d\zeta, \\ \sigma_{yy} &= -\frac{1}{\pi} Re\, i \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{N_2(\zeta)\sqrt{t - \zeta l}}{\left(\zeta - \dfrac{t - \zeta l}{x}\right) x\sqrt{x}} d\zeta, \end{aligned} \tag{18}$$

где понимается конечная часть интеграла. Поскольку при $\alpha \approx \infty$ $\gamma(\alpha) \approx X^-(\alpha) = G^{-1}(\alpha)$, которая дается формулой (14), то (11) дает систему уравнений

Фредгольма

$$
\begin{aligned}
&y_{11}(\overline{\alpha})-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{c_{11}y_{11}(\zeta)+c_{12}(\zeta)y_{21}-y_{11}(\zeta)}{\zeta-\overline{\alpha}}d\zeta=-\frac{1}{d}\left(\frac{a^2}{2\rho b^2(a^2-b^2)}+\frac{a_1^2}{2\rho_1 b_1^2(a_1^2-b_1^2)}\right);\\
&y_{12}(\overline{\alpha})-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{c_{11}y_{12}(\zeta)+c_{12}(\zeta)y_{22}-y_{12}(\zeta)}{\zeta-\overline{\alpha}}d\zeta=-\frac{1}{d}\left(\frac{i}{2\rho(a^2-b^2)}-\frac{i}{2\rho_1(a_1^2-b_1^2)}\right);\\
&y_{21}(\overline{\alpha})-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{c_{21}y_{11}(\zeta)+c_{22}(\zeta)y_{21}-y_{21}(\zeta)}{\zeta-\overline{\alpha}}d\zeta=-\frac{1}{d}\left(\frac{i}{2\rho(a^2-b^2)}-\frac{i}{2\rho_1(a_1^2-b_1^2)}\right);\\
&y_{22}(\overline{\alpha})-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{c_{21}y_{12}(\zeta)+c_{22}(\zeta)y_{22}-y_{22}(\zeta)}{\zeta-\overline{\alpha}}d\zeta=-\frac{1}{d}\left(\frac{a^2}{2\rho b^2(a^2-b^2)}+\frac{a_1^2}{2\rho_1 b_1^2(a_1^2-b_1^2)}\right),
\end{aligned}
\tag{19}
$$

где вместо $(-\infty,\infty)$ можно взять для расчетов интервал интегрирования $(-5,5)$, что возможно для приближенных вычислений сходящихся интегралов.

Разрешимость системы (19) показана в [3]. Поскольку $X^+(\overline{\alpha})=G(\overline{\alpha})X^-(\overline{\alpha})$, имеет место соотношение

$$
\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} -b_{11} & -b_{12}\\ -b_{21} & -b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12}\\ y_{21} & y_{22}\end{pmatrix}, \tag{20}
$$

откуда для произвольных ζ по известным y_{ik} из (19) найдутся $x_{ik}(\zeta)$, т. е. уже можно из (18) найти σ_{xy} в замкнутом виде. Поведение напряжения σ_{xy} при $x\to-0$ имеет вид $\sigma_{xy}\doteq 0\left(\frac{1}{(-x)^{1/2}}\right)$, что соответствует поставленному условию на ребре.

Вводя безразмерные переменные

$$
\overline{\alpha}=\frac{\omega}{c_1}\eta,\ \zeta=\frac{\omega}{c_1}\chi,\ y_{jk}=2\rho\alpha^2\overline{y}_{jk}\ j,k=1,2, \tag{21}
$$

в силу (10) можно написать

$$
\begin{aligned}
&\overline{\Delta}(\chi)c_{11}=\overline{a}_0(\eta)\overline{a}_0(\chi)-\overline{a}_1(\eta)\overline{a}_1 f(\chi),\\
&\overline{\Delta}(\chi)c_{12}=\overline{a}_0(\eta)\overline{a}_1(\chi)-\overline{a}_1(\chi)-\overline{a}_1(\eta)\overline{a}_0(\chi),\\
&\overline{\Delta}(\chi)c_{21}=\overline{a}_0(\eta)\overline{a}_1 f(\chi)-\overline{a}_1 f(\eta)\overline{a}_0(\chi),\\
&\overline{\Delta}(\chi)c_{22}=\overline{a}_0(\eta)\overline{a}_0(\chi)-\overline{a}_1 f(\eta)\overline{a}_1(\chi),\\
&\overline{\Delta}(\chi)=\overline{a}_0^2(\chi)-\overline{a}_1(\chi)\overline{a}_1 f(\chi),
\end{aligned}
\tag{22}
$$

где $\overline{a}_1(\eta)=\dfrac{a^2\gamma_2^2}{b^2\overline{R(\eta)}}-\dfrac{a^2b^2}{b_1^4}\dfrac{\rho}{\rho_1}\dfrac{\beta_2\gamma_2}{R_1(\overline{\eta})}$, $\overline{a_1 f}(\eta)=\dfrac{\rho}{\rho_1}\dfrac{b^2}{b_1^4}\dfrac{a^2\beta_1\gamma_2}{\overline{R_1(\eta)}}-\dfrac{a^2\gamma_1\gamma_2}{b^2\overline{R_1(\eta)}}$,

$$
\overline{a}_0(\eta)=(2\beta_1\beta_2-x_1)\eta\gamma_2\frac{\rho b^2}{\rho_1 b_1^2\overline{R_1(\eta)}}-\frac{(2\gamma_1\gamma_2-x)\eta\gamma_2}{\overline{R(\eta)}},
$$

$$\overline{R(\eta)} = 4\eta^2\overline{\gamma}_1\overline{\gamma}_2 + \left(\frac{a^2}{b^2} - 2\eta^2\right)^2; \; \overline{R_1(\eta)} = 4\eta^2\overline{\beta}_1\overline{\beta}_2 + \left(\frac{a_1^2}{b_1^2} - 2\eta^2\right)^2,$$

$$\overline{\gamma}_1 = \sqrt{1-\eta^2}; \; \overline{\gamma}_2 = \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - \eta^2}; \; \overline{\beta}_1 = -\sqrt{\frac{a^2}{a_1^2} - \eta^2}; \; \overline{\beta}_2 = -\sqrt{\frac{a^2}{b_1^2} - \eta^2}.$$

Численный расчет коэффициентов интенсивности напряжений.

При расчетах взято $\frac{a^2}{b^2} = 3$; $\frac{a_1^2}{b_1^2} = 3$; $\frac{\rho}{\rho_1} = 2$; $\frac{b^2}{b_1^2} = 2$; $\frac{a^2}{a_1^2} = 2$.
После определения $\overline{y}_{jk}$ можно найти согласно (9)

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = c_1^2 \begin{pmatrix} \overline{x}_{11} & \overline{x}_{12} \\ \overline{x}_{21} & \overline{x}_{22} \end{pmatrix}, \tag{23}$$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = -c_1^2\gamma_2(\alpha) \begin{pmatrix} \overline{y}_{11} & \overline{y}_{12} \\ \overline{y}_{21} & \overline{y}_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \overline{a}_1(\eta) & \overline{a}_0(\eta) \\ \overline{a}_0(\eta) & \overline{a}_1 f(\eta) \end{pmatrix}. \tag{24}$$

После этого с учетом обозначений (21) и заменяя $\omega = i\frac{\partial}{\partial t}$, можно, вычисляя также аналогичным образом σ_{xy} при $y = 0$, $x \approx 0$ и обозначая

$$\overline{M}_1(\chi) = 2(\overline{a}_1\overline{x}_{21}(\chi) - \overline{a}_0\overline{x}_{11}(\chi))\frac{\overline{d}_1(\chi)}{\overline{d}} + 2(\overline{a}_1\overline{x}_{22}(\chi) - \overline{a}_0\overline{x}_{22}(\chi) - \overline{a}_0\overline{x}_{12}(\chi))\frac{\overline{d}_2(\chi)}{\overline{d}} = N_1(\chi)e^{i\chi l},$$

$$\overline{M}_2(\chi) = -2(\overline{a}_1\overline{x}_{11}(\chi) + \overline{a}_0\overline{x}_{21}(\chi) + \overline{a}_0\overline{x}_{21}(\chi))\frac{\overline{d}_1(\chi)}{\overline{d}} - 2(\overline{a}_1\overline{x}_{12}(\chi) + \overline{a}_0\overline{x}_{22}(\chi))\frac{\overline{d}_2(\chi)}{\overline{d}} = N_2(\chi)e^{i\chi l},$$

получить

$$\frac{\sigma_{yy}\pi a\sqrt{a}}{b^2} = -Re\frac{\partial}{\partial t}\int_{-5}^{5}\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{\sqrt{\frac{a}{b} + \chi}\overline{M}_1(\chi)}{\sqrt{t - \frac{l\chi}{a}}}d\chi = PI_1 + P_1I_2 + QI_3 + Q_1I_4,$$

$$\frac{\sigma_{xy}\pi a\sqrt{a}}{b^2} = -Re\frac{\partial}{\partial t}\int_{-5}^{5}\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{\sqrt{\frac{a}{b} + \chi}\overline{M}_2(\chi)}{\sqrt{t - \frac{l\chi}{a}}}d\chi, \; \overline{d} = \overline{a}_0^2 - \overline{a}_1\overline{a}_1 f, \tag{25}$$

$$\overline{d}_1(\chi) = \frac{\left(2\gamma_1\gamma_2 - \frac{a^2}{b^2} + 2\chi^2\right)P\chi}{\overline{R(\chi)}} - \frac{a^2\chi\rho P_1\left(2\beta_1\beta_2 + \frac{a^2}{b_1^2} - 2\chi^2\right)}{b_1^2\rho_1\overline{R_1(\chi)}} - \frac{Q}{\overline{R(\chi)}} - \frac{\rho a^4 Q_1}{\rho_1 b_1^4\overline{R_1(\chi)}},$$

$$\overline{d}_2(\chi) = \frac{P\chi}{\overline{R(\chi)}} + \frac{\left(2\gamma_1\gamma_2 - \frac{a^2}{b^2} + 2\chi^2\right)Q\chi}{\overline{R(\chi)}} + \frac{\rho a^4 P_1}{\rho_1 b_1^4\overline{R_1(\chi)}} - \frac{\left(2\beta_1\beta_2 + \frac{a^2}{b_1^2} - 2\chi^2\right)a^2\rho Q_1\chi}{\rho_1 b_1^2\overline{R_1(\chi)}}$$

Особенности в (25), где подкоренное выражение обращается в нуль, интегрируемые. В (25) следует задавать $t = 0,1; 1; 3, -\frac{l}{at} = 1$. Результаты расчета для I_1; I_2; I_3; I_4 в правой части (25) приведены в таблице.

t	0,1	1	3
I_1	$-0,16\times10^8$	$-0,5\times10^6$	$-0,96\times10^5$
I_2	$-0,37\times10^5$	$-0,12\times10^4$	$-0,22\times10^3$
I_3	$-0,23\times10^7$	$-0,73\times10^5$	$-0,14\times10^5$
I_4	$0,10\times10^7$	$0,33\times10^4$	$0,63\times10^4$

Горисский филиал ГИУА

Ա. Ն. Մարտիրոսյան, Հ. Ա. Մարտիրոսյան, Ք. Ս. Կոստանդյան

Իմպուլսների վերաբերյալ խնդիրը կիսաանվերջ ճեղքերի եզրերում

Դիտարկվում է կիսաանվերջ ճեղքի առկայությամբ իզոտրոպ առաձգական միջավայրի շարժման մասին հարթ խնդիրը, երբ վերին և ստորին կիսահարթությունները ունեն տարբեր առաձգական հաստատուններ, համապատասխանաբար (λ, μ, ρ) և $(\lambda_1, \mu_1, \rho_1)$: Խնդիրը լուծվում է Լապլասի և Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխությունների մեթոդով, որը բերվում է Վիներ - Հոպֆի հավասարումների համակարգի լուծմանը և այնուհետև՝ Ֆրեդհոլմի հավասարումների համակարգին. սա լուծվում է թվայնորեն:

A. N. Martirosyan, H. A. Martirosyan, K. S. Kostandyan

The Problem of Impulses Given on Semiinfinite Crack

The plane problem of motion of isotrop elastic media on presence of semiinfinite crack for halfplanes with different elastic constants is considered.

Литература

1. *Багдоев А. Г., Мартиросян А. Н.* - МТТ. 1976. N1. С. 100-111.

2. *Нобл Б.* Применение метода Винера - Хопфа для решения дифференциальных уравнений с частными производными. М. ИЛ. 1962. 279 с.

3. *Векуа Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений. М. Наука. 1970. 380 с.