ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Volume 106 2006 № 2

МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

Г. М. Айрапетян, П. Э. Меликсетян

О задаче типа Дирихле для неправильно эллиптического уравнения третьего порядка

(Представлено академиком В.С. Захаряном 20/II 2006)

Ключевые слова: *задача Дирихле, граничные условия, весовые пространства, интеграл типа Коши*

1. Пусть B - класс трижды дифференцируемых функций в верхней полуплоскости $\Pi^+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ комплексной плоскости z, удовлетворяющих условию

$$\left|\frac{\partial^{p+q}u}{\partial z^p \partial \overline{z}^q}\right| < A|z|^N,\ \operatorname{Im}\, z > y_0 > 0,\ p \geq 0, q \geq 0, p+q \leq 2$$

где A - постоянная, зависящая от y_0, а N - натуральное число, зависящее от u,

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right), \frac{\partial u}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

В верхней полуплоскости Π^+ рассматривается следующая граничная задача: определить решение u уравнения

$$\frac{\partial^3 u}{\partial z \partial \overline{z}^2} = 0,\ u \in B,\ z = a + iy \in \Pi^+, \tag{1}$$

так, чтобы выполнялись граничные условия

$$\lim_{y\to+0} \|u(x,y) - f_0(x)\|_{L^1(\rho)} = 0, \tag{2}$$

$$\lim_{y\to+0} \|Re\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} - f_1(x)\|_{L^1(\rho)} = 0, \tag{3}$$

где $\rho(x) = (1+|x|)^{-\alpha}$, $\alpha \geq 0$, $f_0(x)$, $f_0'(x)$, $f_1(x) \in L^1(\rho)$, $L^1(\rho)$ - пространство функций на действительной оси с нормой

$$\|f\|_{L^1(\rho)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\rho(x)dx < \infty.$$

Граничные задачи для неправильно-эллиптических уравнений в ограниченных областях в классах Гельдера исследованы в работах [1-4]. В работе [5] в полуплоскости также в классах Гельдера исследованы граничные задачи для однородного уравнения с постоянными коэффициентами. Следует отметить, что в этих исследованиях существенную роль играет тот факт, что интеграл типа Коши является ограниченным оператором в указанных пространствах. Хорошо известно, что интеграл типа Коши не является ограниченным оператором в пространстве L^1 и тем более в пространстве $L^1(\rho)$. В случае, когда граничные функции принадлежат классу L^1, граничное условие следует понимать в более общем смысле сходимости L^1 [6-9].

В данной работе для любого $\alpha \geq 0$ определяется общее решение задачи (1) - (3) в явном виде. Доказывается, что если α нецелое число, то эта задача имеет решение для любых функций $f_0(x)$, $f_1(x)$. Если $\alpha \geq 2$ целое число, то для того, чтобы задача (1) - (3) имела решение, достаточно условие

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\left(\frac{1}{(x+i)^\alpha} + \frac{1}{(x-i)^\alpha}\right)dx = 0.$$

В случае, когда $\alpha = 0, 1$, устанавливается, что если

$$\int\limits_{-\infty}^{x} f_1(t)\left(\frac{1}{(t+i)^\alpha} + \frac{1}{(t-i)^\alpha}\right)dt \in L^1(\rho),$$

то задача (1) - (3) имеет решение.

2. Для исследования задачи (1) - (3) нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *Общее решение уравнения (1) можно представить в виде*

$$u(z) = \varphi(z) + y\psi(z) + \overline{\omega(z)},\ \omega(i) = \omega'(i) = 0, \tag{4}$$

где $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\omega(z)$ аналитические функции в Π^+ и определяются через $u(z)$ однозначно.

Лемма 2. *Пусть $f \in L^1(\rho)$, α - нецелое число и $n = [\alpha]$. Тогда, если*

$$\Phi(f:z) = \frac{(z+i)^n}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{(t+i)^n}\frac{dt}{t-z},$$

то

$$\lim_{y\to+0} y\|\Phi(f:x+iy)\|_{L^1(\rho)}=0.$$

Лемма 3. *Пусть* $f\in L^1(\rho)$, $\rho(x)=(1+|x|)^{-\alpha}$, $n=[\alpha]$,

$$\Phi(f:z)=\frac{(z+i)^n}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{(t+i)^n}\frac{dt}{t-z}$$

Тогда

$$\lim_{y\to+0} y\|\Phi'(x+iy)\|_{L^1(\rho)}=0.$$

Теорема 1. *Если функция* $u(z)$ *является решением задачи (1) - (3), то ее можно представить в виде (4), где*

$$\varphi(z)=\frac{(z+i)^n}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_0(t)}{(t+i)^n}\frac{dt}{t-z}+P_0(z), \tag{5}$$

$$\omega(z)=\frac{(z-i)^n}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\overline{f_0(t)}}{(t-i)^n}\frac{dt}{t-z}-\overline{P_0(\overline{z})}, \tag{6}$$

$$\psi(z)=\frac{(z+i)^n}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_1(t)}{(t+i)^n}\frac{dt}{t-z}+\frac{(z-i)^n}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_1(t)}{(t-i)^n}\frac{dt}{t-z}-i\varphi'(z)-i\omega'(z)+P_1(z). \tag{7}$$

Здесь полиномы $P_0(z)$ и $P_1(z)$ однозначно определяются через $u(z)$, причем коэффициенты полинома $P_1(z)$ чисто мнимые комплексные числа.

Доказательство. Так как решение $u(z)$ уравнения (1), согласно лемме 1, представимо в виде $u(z)=\varphi(z)+y\psi(z)+\overline{\omega(z)}$, $\varphi(i)=0$, то, подставив $u(z)$ в условия (2) и (3), для определения функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\omega(z)$ получим следующую граничную задачу в классе аналитических функций в верхней полуплоскости.

$$\lim_{y\to+0}\|\varphi(x+iy)+y\psi(x+iy)+\overline{\omega(x+iy)}-f_0(x)\|_{L^1(\rho)}=0, \tag{8}$$

$$\lim_{y\to+0}\|Re(i\varphi'(x+iy)+\psi(x+iy)+iy\psi'(x+iy)+i\omega'(x+iy))-f_1(x)\|_{L^1(\rho)}=0. \tag{9}$$

Положив $\omega^-(z)=-\overline{\omega(\overline{z})}$, $z\in\Pi^-=\{z:\mathrm{Im}\ z<0\}$, (8) можно представить в виде

$$\lim_{y\to+0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\varphi(x+iy)}{(x+i)^n}+\frac{y\psi(x+iy)}{(x+i)^n}-\frac{\omega^-(x-iy)}{(x+i)^n}-\frac{f_0(x)}{(x+i)^n}\right|\frac{dx}{|x+i|}=0. \tag{10}$$

Обозначим

$$\frac{\varphi(x+iy)}{(x+i)^n}+\frac{y\psi(x+iy)}{(x+i)^n}-\frac{\omega^-(x-iy)}{(x+i)^n}=f_{0y}(x),$$

тогда $f_{0y}(x)\in L^1((1+|x|)^{-1})$ и $f_{0y}(x)\to f_0(x)(x+i)^{-n}$ в $L^1((1+|x|)^{-1})$.
Далее имеем

$$\Phi_y^+(x)-\Phi_y^-(x)=f_{0y}(x), \tag{11}$$

где

$$\Phi_y^+(z)=\frac{\varphi(z+iy)}{(z+i)^n}+\frac{y\psi(z+iy)}{(z+i)^n},\qquad z\in\Pi^+,$$

$$\Phi_y^-(z)=\frac{\omega^-(z-iy)}{(z+i)^n},\qquad z\in\Pi^-,$$

причем функция $\Phi_y^-(z)$ имеет полюс порядка n в точке $z=-i$.

Пусть

$$P_y(z)=\sum_{k=0}^{n-1}A_k(z+i)^k,\quad A_k=\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dz^k}\omega^-(z-iy)\Big|_{z=-i},\quad k=0,1,2,\dots,n-1$$

$$\tilde\Phi_y^-(z)=\Phi_y^-(z)-\frac{P_y(z)}{(z+i)^n}.$$

Из (11) имеем

$$\Phi_y^+(z)-\tilde\Phi_y^-(z)=f_{0y}(x)+\frac{P_y(z)}{(x+i)^n}, \tag{12}$$

где $\tilde\Phi_y^-(z)$ аналитична в Π^-. Решая граничную задачу (12), получаем

$$\begin{aligned}\Phi_y^+(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}f_{0y}(t)\frac{dt}{t-z}+\frac{P_y(z)}{(z+i)^n}+Q_y(z),\quad z\in\Pi^+,\\ \tilde\Phi_y^-(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}f_{0y}(t)\frac{dt}{t-z}+Q_y(z),\qquad z\in\Pi^-,\end{aligned} \tag{13}$$

где $Q_y(z)$ - некоторый полином порядка не больше $N+2$.
Так как $\Phi_y^\pm(z)\to\Phi_0(z)$ и $P_y(z)\to P_{n-1}(z)$ равномерно, при $y\to+0$ в Π^+ и Π^-, соответственно, где

$$P_{n-1}(z)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\omega^-(z))^{(k)}\big|_{z=-i}}{k!}(z+i)^k,$$

и $f_{0y}(t)\to f_0(t)(t+i)^{-n}$ в $L^1(|t+i|^{-1})$, то получаем, что $Q_y(z)\to Q(z)$, при $y\to+0$ равномерно в Π^+ и Π^-, где $Q(Z)$ некоторый полином порядка не больше $N+2$.
Поэтому, переходя к пределу в (13), при $y\to+0$ будем иметь

$$\frac{\varphi(z)}{(z+i)^n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_0(t)}{(t+i)^n}\frac{dt}{t-z}+\frac{P_{n-1}(z)}{(z+i)^n}+Q(z),\qquad z\in\Pi^+,$$

$$\frac{\omega^-(z)}{(z+i)^n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_0(t)}{(t+i)^n}\frac{dt}{t-z} + \frac{P_{n-1}(z)}{(z+i)^n} + Q(z), \qquad z\in\Pi^-,$$

Обозначив $P_0(z) = P_{n-1}(z) + (z+i)^{-n}Q(z)$, получим формулы (5), (6). Далее, обозначая

$$\Psi_y(z) = i\varphi'(z+iy) + \psi(z+iy) + iy\psi'(z+iy) + i\omega'(z+iy),$$

из (9) получим

$$\lim_{y\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\Psi_y^+(x)}{(x+i)^n} + \frac{\overline{\Psi_y(x)}}{(x+i)^n} - \frac{2f_1(x)}{(x+i)^n}\right|\frac{dx}{|x+i|} = 0.$$

Положим

$$\frac{\Psi_y^+(x)}{(x+i)^n} + \frac{\Psi_y^-(x)}{(x+i)^n} = 2f_{1y}(x), \tag{14}$$

где

$$\Psi_y^-(z) = -\overline{\Psi_y(\overline{z})}, \qquad z\in\Pi^-. \tag{15}$$

Так как $f_{1y}(x)\in L^1((1+|x|)^{-1})$, то аналогично из (14), (15) получаем

$$\Psi_y(z) = \frac{(z+i)^n}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{1y}(t)\frac{dt}{t-z} + \frac{(z-i)^n}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f_{1y}(t)}\frac{dt}{t-z} + P_{1y}(z),$$

где $P_{1y}(z)$ некоторый полином, порядок не больше $N+2$, с чисто мнимыми коэффициентами. Теперь, учитывая что $f_{1y}(x)\to f_1(x)(x+i)^{-n}$ в $L^1((1+|x|)^{-1})$, и переходя к пределу в последней формуле, при $y\to+0$ получим

$$i\varphi'(z)+\psi(z)+i\omega'(z) = \frac{(z+i)^n}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_1(t)}{(t+i)^n}\frac{dt}{t-z} + \frac{(z-i)^n}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_1(t)}{(t-i)^n}\frac{dt}{t-z} + P_1(z), \tag{16}$$

где $P_1(z)$ - полином с чисто мнимыми коэффициентами порядка, не превышающего $N+2$. Из (16) получаем формулу (7) для определения $\psi(z)$. Теорема доказана.

3. Применяя результаты работы [8], теорему 1 и леммы 2, 3, получаем следующие предложения.

Теорема 2. *Пусть α нецелое число. Тогда однородная задача (1) - (3) имеет $3n$, $n=[\alpha]$ линейно независимых решений над полем действительных чисел. Эти решения можно представить в виде*

$$\begin{aligned}
&u_k(z) = z^k - \overline{z}^k, && k = 2,3,\dots,n,\\
&\tilde{u}_k(z) = i((z^k-\overline{z}^k) - k(z-\overline{z})z^{k-1}), && k=2,3,\dots,n+1,\\
&\nu_k(z) = (z-\overline{z})z^k, && k=0,1,\dots,n-1,\\
&\tilde{\nu}_{n+1}(z) = z^{n+1}-\overline{z}^{n+1} - (n+1)(z-\overline{z})z^n.
\end{aligned}$$

Если $\alpha \in (0;1)$, то однородная задача имеет только тривиальное решение.

Теорема 3. *Справедливы следующие утверждения.*

a) Пусть $\alpha = 0, 1$. *Тогда однородная задача (1) - (3) имеет только тривиальное решение.*

b) Пусть $\alpha = n = 2, 3, \ldots$. *Тогда однородная задача (1) - (3) имеет* $3n-4$, $n = [\alpha]$ *линейно независимых решений над полем действительных чисел. Эти решения можно представить в виде*

$$\begin{aligned}
&u_k(z) = z^k - \overline{z}^k, && k = 2, 3, \ldots, n-1, \\
&\tilde{u}_k(z) = i((z^k - \overline{z}^k) - k(z - \overline{z})z^{k-1}), && k = 2, 3, \ldots, n, \\
&\nu_k(z) = (z - \overline{z})z^k, && k = 0, 1, \ldots, n-2.
\end{aligned}$$

Теорема 4. *Пусть* α *нецелое число. Тогда задача (1) - (3) имеет решение для любых функций* $f_0(x)$, $f_0'(x) \in L^1(\rho)$, $f_1(x) \in L^1(\rho)$. *Общее решение можно представить в виде*

$$u(z) = u_0(z) + u_1(z), \tag{17}$$

где $u_0(z)$ *- общее решение однородной задачи, а* $u_1(z) = \varphi(z) + y\psi(z) + \overline{\omega(z)}$, *где*

$$\varphi(z) = \frac{(z+i)^n}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_0(t)}{(t+i)^n} \frac{dt}{t-z},$$

$$\omega(z) = \frac{(z-i)^n}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{f_0(t)}}{(t-i)^n} \frac{dt}{t-z},$$

$$\psi(z) = \frac{(z+i)^n}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_1(t)}{(t+i)^n} \frac{dt}{t-z} + \frac{(z-i)^n}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_1(t)}{(t-i)^n} \frac{dt}{t-z} - i\varphi'(z) - i\omega'(z).$$

Теорема 5. *Пусть* $\alpha = 2, 3, \ldots$. *Для того, чтобы задача (1) - (3) имела решение, достаточно, чтобы функция* $f_1(x)$ *удовлетворяла условию*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) \left(\frac{1}{(t+i)^n} + \frac{1}{(t-i)^n} \right) dt = 0.$$

Если это условие выполняется, то общее решение задачи (1) - (3) можно представить в виде (17).

Теорема 6. *Пусть* $\alpha = 0, 1$. *Если функция* $f_1(x)$ *такая, что*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) \left(\frac{1}{(t+i)^n} + \frac{1}{(t-i)^n} \right) dt \in L^1(\rho),$$

то задача (1) - (3) однозначно разрешима и решение можно представить в виде (17), где $P_0(z) \equiv P_1(z) \equiv 0$.

Государственный инженерный университет Армении

Հ. Մ. Հայրապետյան, Պ. Է. Մելիքսեթյան

Դիրիխլեի տիպի խնդիրը երրորդ կարգի ոչ ճշգրիտ էլիպսական հավասարման համար

Երրորդ կարգի ոչ ճշգրիտ էլիպսական հավասարման համար հետազոտվում է Դիրիխլեի խնդիրը կիսահարթությունում: Ենթադրելով, որ եզրային ֆունկցիաները պատկանում են կշռով հանրագումարելի ֆունկցիաների տարածությանը, ստացվել են բանաձևեր համասեռ և անհամասեռ խնդիրների ընդհանուր լուծումների համար:

H. M. Hayrapetyan, P. E. Meliksetyan

Dirichlet Type Problem for Third Order Improperly Elliptic Equation

We consider the Dirichlet problem for third order improperly elliptic equation in the half - plane. The formulas for solutions of homogeneous and inhomogeneous problems are obtained when the boundary functions belong to the space of weight integrable functions.

Литература

1. *Солдатов А. П.* - Дифференциальные уравнения. 1989. Т 25. N1.

2. *Солдатов А. П.* Линейные операторы в функциональных пространствах. Грозный. 1989.

3. *Товмасян Н. Е.* - Изв. НАН Армении. Математика. 1992. Т. 27. N1.

4. *Babayan A. O.* - Izvestia Nationaly Akademii Nauk Armenii. Matematika. 1994. V. 29. N2.

5. *Быкчантаев И. А.* - Изв. высш. уч. заведений. Математика. 1975. N6(157).

6. *Айрапетян Г. М.* - Изв. НАН Армении. Математика. 1993. Т. 28. N3.

7. *Айрапетян Г. М., Петросян В. Ш.* - Изв. НАН Армении. Математика. 1998. Т. 33. N5.

8. *Айрапетян Г. М., Меликсетян П. Э.* - Изв. НАН Армении. Математика. 2003. Т. 38. N6.

9. *Айрапетян Г. М.* - РАН. Мат. заметки. 2004. Т. 76. вып. 5.

10. *Бицадзе А. В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М. Наука. 1966.

11. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М. Наука. 1968.