ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Volume 106 2006 № 2

МАТЕМАТИКА

УДК 517.51

Член-корреспондент НАН РА Г.Г. Геворкян[1], А. Камонт[2]

Некоторые свойства сопряженной общей системы Франклина

(Представлено 23/XI 2006)

Ключевые слова: *общая система Франклина, сопряженная система, базис*

Пусть $T = \{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ допустимое разбиение периодического отрезка $[0;2\pi)$, т.е. $t_i \in [0;2\pi)$, $t_i \neq t_j$, когда $i \neq j$, и последовательность T всюду плотна в $[0;2\pi)$. Для фиксированного n обозначим через $T^{(n)} = \{t_{n,i}\}_{n=1}^{\infty}$ конечную последовательность со свойствами: $\{t_i\}_{i=1}^{n} = \{t_{n,i}\}_{i=1}^{n}$ и $0 \leq t_{n,1} < t_{n,2} < \cdots < t_{n,n} < 2\pi$. Далее, вводим также точки $t_{n,0} = t_{n,n} - 2\pi$ и $t_{n,n+1} = t_{n,1} + 2\pi$. Через S_n обозначается множество функций f, непрерывных на $[0;2\pi]$, периодических с периодом 2π, т.е. $f(0) = f(2\pi)$, и линейных на каждом интервале $[t_{n,i};t_{n,i+1}]$, $i = 1,\dots,n$. Очевидно, что S_n линейное множество размерности n и $S_n \subset S_{n+1}$. Следовательно, для каждого $n > 1$ единственным образом определяется функция $f_n \in S_n$, которая ортогональна к S_{n-1}, $\|f_n\|_2 = 1$ и $f_n(t_n) > 0$. Полагая $f_1(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, получаем полную ортонормированную в $L_2[0;2\pi]$ систему функций $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, которая называется периодической общей системой Франклина.

Обозначим $I_{n,i} = [t_{n,i};t_{n,i+1}]$ и $\lambda_{n,i} = |I_{n,i}|$, где $|I|$ длина отрезка I. Через $\rho(x,y)$ обозначается расстояние точек x и y по "окружности", т.е. $\rho(x,y) = \min\{|x-y|;||x-y|-2\pi|\}$.

Определение 1. *Разбиение T называется сильно регулярным, если существует $\gamma > 1$ такое, что*

$$\gamma^{-1} \leq \frac{\lambda_{n,i}}{\lambda_{n,i-1}} \leq \gamma \tag{1}$$

[1] *Работа выполнена при поддержке Армянского национального фонда науки и образования, грант N05-PS-math-87-65.*

[2] *Работа выполнена при поддержке KBN, грант 1P03A 038 27.*

для всех $n = 1, 2, \dots$ *и* $i = 1, 2, \dots, n$.

Определение 2. *Разбиение* T *называется парно-регулярным, если существует* $\gamma > 1$ *такое, что*

$$\gamma^{-1} \le \frac{\lambda_{n,i} + \lambda_{n,i+1}}{\lambda_{n,i-1} + \lambda_{n,i}} \le \gamma \qquad (2)$$

для всех $n = 1, 2, \dots$ *и* $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Ясно, что любое сильно регулярное разбиение является также парно-регулярным. Обратное неверно.

Определение 3. *Разбиение* T *называется квазидиадическим, если между двумя соседними точками множества* $T^{(2^k)}$ *находится по одной точке из множества* $\{t_n\}_{n=2^k+1}^{2^{k+1}}$

Нетрудно проверить, что для квазидиадических разбиений понятия сильно регулярного и парно-регулярного разбиений эквивалентны.

В работах [1,2] исследована непериодическая общая система Франклина на отрезке $[0;1]$. Непериодический случай от периодического отличается тем, что при определении S_n не ставится условие $f(0) = f(1)$ и тем самым S_n получается размерности $n+1$. В остальном определение непериодической общей системы Франклина на $[0;1]$ и понятия сильно регулярного и парно-регулярного разбиений аналогичны периодическому случаю, с той разницей, что в (1) и (2) $i \neq 1$.

В работе [1] доказано, что при любом разбиении отрезка $[0;1]$ соответствующая непериодическая общая система Франклина является безусловным и гриди базисом в пространствах $L_p[0;1]$, $1 < p < \infty$. В работе [3] аналогичные утверждения доказаны для периодической системы Франклина.

Вопросы базисности общей системы Франклина в пространстве $Re\ H_1$ рассмотрены в [2] и [4], соответственно, в непериодическом и периодическом случаях. В обоих случаях доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Общая система Франклина базис в пространстве* $Re\ H_1$ *тогда и только тогда, когда разбиение* T *парно-регулярное.*

Теорема 2. *Общая система Франклина безусловный (гриди) базис в пространстве* $Re\ H_1$ *тогда и только тогда, когда разбиение* T *сильно регулярное.*

Ранее аналогичные вопросы были рассмотрены в [5], [6], где получены менее общие результаты, чем выше перечисленные.

В настоящей работе мы без доказательств формулируем наши исследования по сопряженной общей системе Франклина.

Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ периодическая система Франклина, соответствующая разбиению T и с периодом 2π продолженная на всю ось. Обозначим через

$\{\tilde{f}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ (тригонометрически) сопряженную систему к системе $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, т.е.

$$\tilde{f}_1(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{ и } \tilde{f}_1(x) = \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{|t|>\varepsilon} f(x+t)ctg\frac{t}{2}dt, \text{ когда } n > 1.$$

Рассматривается следующий вопрос: при каких условиях на разбиение T соответствующая система $\{\tilde{f}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ будет базисом в пространстве 2π-периодических непрерывных функций $C[-\pi;\pi]$.

Если $\{\tilde{f}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ при определенном разбиении T будет базисом в $C[-\pi;\pi]$, то учитывая, что $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ базис в L_1 при любом разбиении (см. [7, 8]) получится, что $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ должно быть базисом в $Re\ H_1$. Следовательно, согласно теореме 1, если $\{\tilde{f}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ базис в $C[-\pi;\pi]$, то разбиение T должно быть парно-регулярным. Однако верно более сильное утверждение.

Теорема 3. *Пусть $\{\tilde{f}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ базис в $C[-\pi;\pi]$ при некотором разбиении T. Тогда T сильно регулярное.*

Обозначим через $L_n(x)$ n-ю функцию Лебега системы $\{\tilde{f}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, т.е.

$$L_n(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{n}\tilde{f}_k(x)\tilde{f}_k(t)\right| dt.$$

Теорема 4. *Пусть T сильно регулярное разбиение отрезка $[-\pi;\pi)$ с параметром регулярности γ и $\{\tilde{f}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ соответствующая сопряженная система Франклина. Существуют положительные постоянные $C_1(\gamma)$, $C_2(\gamma)$, зависящие только от параметра регулярности γ такие, что*

$$C_1(\gamma)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda_{n,i}}{\rho(x,t_{n,i})+\lambda_{n,i}}\right)^4 \le L_n(x) \le C_2(\gamma)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda_{n,i}}{\rho(x,t_{n,i})+\lambda_{n,i}}\right)^3 \qquad (3)$$

Известно (см. напр. [7]), что полная ортонормированная система является базисом в пространстве непрерывных функций, тогда и только тогда, когда ее функции Лебега равномерно ограничены. Поэтому верна следующая

Теорема 5. *Если сильно регулярное разбиение T удовлетворяет условию*

$$\sup_{x\in[0;2\pi)}\ \sup_{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda_{n,i}}{\rho(x,t_{n,i})+\lambda_{n,i}}\right)^3 < \infty, \qquad (4)$$

то соответствующая система $\{\tilde{f}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является базисом в $C[-\pi;\pi]$.

Можно проверить, что любое сильно регулярное и квазидиадическое разбиение удовлетворяет условию (4). Поэтому в классе квазидиадических разбиений получаем необходимое и достаточное условие при котором соответствующая система $\{\tilde{f}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является базисом в $C[-\pi;\pi]$.

Теорема 6. *При квазидиадическом разбиении T соответствующая система $\{\tilde{f}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является базисом в $C[-\pi;\pi]$, тогда и только тогда, когда T сильно регулярное.*

Теоремы 5 и 6 обобщают теорему С.В. Бочкарева [9] о том, что сопряженные к классическим периодическим функциям Франклина образуют базис в $C[-\pi;\pi]$. Напомним, что классическая периодическая система Франклина получается при $t_1 = 0$, $t_n = \dfrac{2\nu - 1}{2^\mu}$, где $n = 2^\mu + \nu$, $\mu = 0, 1, 2, \ldots$, $\nu = 1, 2, \ldots, 2^\mu$.

Отметим, что кроме квазидиадических сильно регуляных разбиений существуют также другие сильно регуляные разбиения для которых выполняется (4). Например, разбиения для которых

$$\sup_n \max_{i,j} \frac{\lambda_{n,i}}{\lambda_{n,j}} < \infty.$$

Нетрудно построить сильно регуляные разбиения (не квазидиадические), для которых

$$\sup_n \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\lambda_{n,i}}{\rho(x, t_{n,i}) + \lambda_{n,i}} \right)^4 = \infty$$

для определенных x или для всех $x \in E$, где E любое счетное множество. Поэтому в силу теоремы 4 в классе сильно регулярных разбиений существуют такие, для которых соответствующая система $\{\tilde{f}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ не является базисом в $C[-\pi;\pi]$.

Интересно отметить, что существует сильно регулярное разбиение T такое, что соответствующая система $\{\tilde{f}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ не является базисом в $C[-\pi;\pi]$, но ряд Фурье любой непрерывной функции по системе $\{\tilde{f}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится вне любой окрестности точки 0.

В 1974 г. С.В. Бочкарев [10], применяя классическую систему Франклина (т.е. систему, которая получается при $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ и $t_n = \dfrac{2\nu - 1}{2^\mu}$, где $n = 2^\mu + \nu$, $\mu = 0, 1, 2, \ldots$, $\nu = 1, 2, \ldots, 2^\mu$), впервые построил базис в пространстве A, т.е. в пространстве функций F, аналитических в единичном круге $D = \{z : |z| < 1\}$ и непрерывных в замкнутом круге $\overline{D} = \{z : |z| \le 1\}$, с нормой $\|F\| = \sup\limits_{|z|=1} |F(z)|$.

Применим конструкцию С.В. Бочкарева [10] к общей (непериодической) системе Франклина. Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ общая система Франклина, порожденная разбиением отрезка $[0; 2\pi]$ точками $T = \{t_n\}_{n=0}^{\infty}$. Обозначим

$$F_n(x) = \begin{cases} \varphi_n(2x) & \text{для} \quad x \in [0;\pi], \\ \varphi_n(-2x) & \text{для} \quad x \in [-\pi; 0]. \end{cases} \tag{5}$$

Пусть

$$G_0(x) = \frac{1 + i}{2\sqrt{\pi}}, \quad G_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[F_n(x) + i\tilde{F}_n(x)], \ \ n = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

где $\tilde{F}_n(x)$ сопряженная к $F_n(x)$.

Положим

$$G_n(z) \equiv G_n(re^{ix}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G_n(t)P(r, x-t)dt, \tag{7}$$

где $P(r,t)$ - ядро Пуассона.

Верны следующие теоремы.

Теорема 7. *Если сильно регулярное разбиение T отрезка $[0;2\pi]$ удовлетворяет условию*

$$\sup_{x\in[0;2\pi]}\sup_n \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda_{n,i}}{|x-t_{n,i}|+\lambda_{n,i}}\right)^3 < \infty, \tag{8}$$

то соответствующая система $\{G_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ базис в A.

Теорема 8. *Если сильно регулярное разбиение T отрезка $[0;2\pi]$ удовлетворяет условию*

$$\sup_{x\in[0;2\pi]}\sup_n \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda_{n,i}}{|x-t_{n,i}|+\lambda_{n,i}}\right)^4 = \infty, \tag{9}$$

то соответствующая система $\{G_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ не образует базис в A.

Теперь пусть для фиксированного $r = 2,3,\ldots$ $\{\varphi_n^{(r)}(x)\}_{n=2-r}^{\infty}$ непериодическая ортонормальная сплайн система, соответствующая разбиению $T = \{t_n\}_{n=0}^{\infty} \subset [0;2\pi]$. При $r = 2$ система $\{\varphi_n^{(r)}(x)\}_{n=2-r}^{\infty}$ превращается в общую непериодическую систему Франклина $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. Недавно А. Шадрин [11] доказал фундаментальную теорему о том, что при любом разбиении $T = \{t_n\}_{n=0}^{\infty} \subset [0;2\pi]$ норма проектора действующей из $C[0;2\pi]$ в пространство сплайнов гладкости r и с узлами $\{t_i\}_{i=0}^{n}$ ограничена числом, зависящим только от r. Следовательно, если разбиение $T = \{t_n\}_{n=0}^{\infty} \subset [0;2\pi]$ всюду плотно в $[0;2\pi]$, то соответствующая система $\{\varphi_n^{(r)}(x)\}_{n=2-r}^{\infty}$ образует базис в $C[0;2\pi]$.

Применяя конструкцию (5)-(7) к функциям $\{\varphi_n^{(r)}(x)\}_{n=2-r}^{\infty}$, получим систему $\{G_n^{(r)}(z)\}_{n=2-r}^{\infty}$. Верна следующая

Теорема 9. *Если сильно регулярное разбиение T отрезка $[0;2\pi]$ удовлетворяет условию*

$$\sup_{x\in[0;2\pi]}\sup_n \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda_{n,i}}{|x-t_{n,i}|+\lambda_{n,i}}\right)^{r+1} < \infty, \tag{10}$$

то соответствующая система $\{G_n^{(r)}(z)\}_{n=2-r}^{\infty}$ образует базис в A.

Сравнивая условия (8)-(10), получаем, что существуют такие разбиения T, что соответствующие им системы $\{G_n^{(2)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ не образуют базис в A, а системы $\{G_n^{(4)}(z)\}_{n=-2}^{\infty}$ образуют базис в A.

В конце отметим, что если будет доказан аналог теоремы А. Шадрина для периодических сплайн систем, тогда, возможно, будут доказаны аналоги теорем 4 и 5 для сопряженных периодических сплайн систем $\{\tilde{f}_n^{(r)}(x)\}_{n=3-r}^{\infty}$. В этом случае в (3), (4) в показателях вместо 3 будет $r+1$.

Ереванский государственный университет

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Գ.Գ. Գևորգյան, Ա. Կամոնտ

Ֆրանկլինի ընդհանուր համալուծ համակարգի որոշ հատկություններ

Գտնված են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որոնց բավարարող տրոհումներին համապատասխանող Ֆրանկլինի ընդհանուր համալուծ համակարգը կլինի բազիս անընդհատ ֆունկցիաների տարածությունում: Հետազոտված է նաև Ֆրանկլինի ընդհանուր համակարգի միջոցով միավոր շրջանում անալիտիկ և փակ շրջանում անընդհատ ֆունկցիաների տարածությունում բազիս կառուցելու հարցը:

Corresponding Member of NAS RA G.G. Gevorkyan, A. Kamont

Some Properties of Conjugate General Franklin System

The necessary and sufficient conditions on partitions under which the corresponding conjugate general Franklin system is basis in the space of continuous functions are founded. The question of constructing of the basis in the space of functions analytic in disc and continuous in close disc with general Franklin system is investigated, too.

Литература

1. *G.G. Gevorkyan, A. Kamont,* - Studia Math. 164 (2004). 161-201.
2. *G.G. Gevorkyan, A. Kamont,* - Studia Math. 167 (2005). 259-292.
3. *K. Keryan,* - J. Contemp. Math. Anal. V. 40 (2005). 1.
4. *M. Poghosyan, K. Keryan,* - J. Contemp. Math. Anal. V. 40 (2005). 1.
5. *G.G. Gevorkyan, A. Kamont,* - Dissertationes mathematicae (Rozprawy Matematyczne). 374 (1998). 1-59.
6. *G.G. Gevorkyan, A.A. Sahakian,* - J. Contemp. Math. Anal. V. 35 (2000). 4. 2-22.
7. *Б.С. Кашин, А.А. Саакян,* - Ортогональные ряды. Москва. АФЦ. 1999.
8. *Z. Ciesielski,* - Studia Math. 23 (1963). 141-157.
9. *С.В. Бочкарев,* - ДАН СССР. Т. 285 (1985). N 3. 521-526.
10. *С.В. Бочкарев,* - Мат. сб. 1974. Т. 95. N 1. 3-18.
11. *A.Yu. Shadrin,* - Acta Math. V. 187. (2001). 59-137.