

УДК 62.506.10

М. С. Габриелян, Л. А. Мазманян

### Об оптимальном управлении колебательных движений круглой пластинки в конфликтных ситуациях

(Представлено академиком Г.Е. Багдасаряном 6/Х 2005)

**Ключевые слова:** дифференциальная игра, оптимальные управляющие воздействия, гипотетическое рассогласование, линейные колебания, бесселевы функции

1. Рассмотрим линейные колебания круглой пластинки плотности  $\rho$  ( $\rho = \gamma/g$ , где  $\gamma$  - удельный вес материала,  $g$  - ускорение силы тяжести), постоянной толщины  $h$ . Пластика шарнирно оперта по контуру. Пусть на поверхности пластинки на множестве положительной меры действуют две перпендикулярно распределенные силы:  $F_1(r,\theta,t)$  и  $F_2(r,\theta,t)$ . Предполагая, что динамический прогиб  $w(r,\theta,t)$  мал по сравнению с толщиной  $h$ , а толщина, в свою очередь, мала по сравнению с радиусом  $r = a$  пластинки, дифференциальное уравнение линейных колебаний будет ([1], с. 322, [2], с. 278)

$$D \nabla^4 w + \frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{F_1(r,\theta,t)}{h} + \frac{F_2(r,\theta,t)}{h}, \quad (1.1)$$

где  $D = Eh^3/12(1 - \mu^2)$  - жесткость пластинки,  $\mu$  - коэффициент Пуассона,  $E$  - модуль упругости материала при растяжении (сжатии),  $a$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Края пластинки удовлетворяют следующим условиям шарнирного опирания ([1], [2], с. 325):

$$w(r,\theta,t) = 0, M_r = 0 \text{ при } r = a, \quad (1.2)$$

где  $M_r = -D[(\partial^2 w)/(\partial r^2)] + \mu[1/r][(\partial w)/(\partial r)] + [1/(r^2)][(\partial^2 w)/(\partial \theta^2)]$  ] изгибающий момент.

Пусть начальные условия будут

$$w(r,\theta,t)|_{t=0} = \varphi(r,\theta), \quad \frac{\partial w(r,\theta,t)}{\partial t} |_{t=0} = \psi(r,\theta), \quad (1.3)$$

где  $\varphi(r, \theta)$  и  $\psi(r, \theta)$  - соответственно начальный прогиб и начальная скорость срединной поверхности.

Задача о собственных колебаниях круглой пластинки ( $F_1(r, \theta, t) = 0$  и  $F_2(r, \theta, t) = 0$ ) при условиях (1.2), (1.3) решается методом разделения переменных ([1], с. 322, [3], с. 430)

$$w(r, \theta, t) = W(r, \theta)T(t) = R(r)\Phi(\theta)T(t), \quad (1.4)$$

где  $T(t)$ ,  $\Phi(\theta)$  и  $R(r)$  удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d^2T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0, \quad (1.5)$$

$$\frac{d^2\Phi(\theta)}{d\theta^2} + \nu^2 \Phi(\theta) = 0, \quad (1.6)$$

$$r^2 \frac{d^2R(r)}{dr^2} + r \frac{dR(r)}{dr} + (\pm \alpha^2 r^2 - \nu^2)R(r) = 0. \quad (1.7)$$

Здесь  $\nu$  - постоянная, а  $\omega$  собственная частота,

$$\omega^2 = \frac{Dg}{h\gamma} \alpha^4. \quad (1.8)$$

Функции  $\Phi(\theta)$  и  $R(r)$  также удовлетворяют следующим условиям ([3], с. 431):

$$|R(0)| < \infty \quad (\text{условия ограниченности}), \quad (1.9)$$

$$R(a) = 0 \quad (\text{граничное условие}), \quad (1.10)$$

$$M_r|_{r=a} = 0 \quad (\text{граничное условие}), \quad (1.11)$$

$$\Phi(\theta) = \Phi(\theta + 2\pi) \quad (\text{условие периодичности}). \quad (1.12)$$

Нетривиальные периодические решения для  $\Phi(\theta)$  существуют лишь при  $\nu^2 = n^2$  ( $n$  - целое число) и имеют вид ([3], с. 431)

$$\Phi_n(\theta) = C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta, \quad (1.13)$$

$C_n, D_n$  определяются из граничных и начальных условий.

Для определения функции  $R(r)$  имеем уравнение (1.7) с однородными граничными условиями (1.9), (1.10) и (1.11). Вводя новую переменную  $\rho = \alpha r$  в случае положительного знака в (1.7) и переменную  $\rho = i\alpha r$  в случае отрицательного знака в (1.7), получим дифференциальное уравнение Бесселя с индексом  $n$  ([4], с. 49)

$$\frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR(\rho)}{d\rho} + \left(1 - \frac{n^2}{\rho^2}\right) R(\rho) = 0. \quad (1.14)$$

После подстановки  $\rho = r$  решение (1.14) будет

$$R(r) = A_n J_n(\alpha r) + B_n J_n(i\alpha r) + E_n Y_n(\alpha r) + F_n Y_n(i\alpha r), \quad (1.15)$$

где  $J_n(\alpha r)$  - бesselева функция первого рода с индексом,  $Y_n(\alpha r)$  - бesselева функция второго рода с индексом,  $J_n(i\alpha r)$ ,  $Y_n(i\alpha r)$  - модифицированные бesselевы функции.

Бesselевы функции второго рода стремятся к бесконечности при  $r \rightarrow 0$ . Тогда коэффициенты  $E_n = 0$ ,  $F_n = 0$ .

Собственные функции данной краевой задачи имеют следующий вид:

$$W_{mn}(r, \theta) = \left[ A_{mn} J_n \left( \lambda_{mn} \frac{r}{a} \right) + B_{mn} J_{mn} \left( i \lambda_{mn} \frac{r}{a} \right) \right] [C_{mn} \cos n\theta + D_{mn} \sin n\theta], \quad (1.17)$$

$$(m = 1, 2, \dots; n = 0, 1, 2, \dots).$$

Собственные числа  $\lambda_{mn} = \alpha_{mn} a$  определяются из уравнения

$$2\lambda_{mn} a [I_n(\lambda_{mn}) J_n(\lambda_{mn})] - (1 - \mu) [I_n(\lambda_{mn}) J_{n+1}(\lambda_{mn}) + J_n(\lambda_{mn}) I_{n+1}(\lambda_{mn})] = 0. \quad (1.18)$$

Решение уравнения (1.1) будем искать в виде ряда

$$w(r, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} W_{mn}(r, \theta) T_{mn}(t), \quad (1.19)$$

где  $T_{mn}(t) = \int_0^a \int_0^{2\pi} w(r, \theta, t) W_{mn}(r, \theta) r dr d\theta$ .

Так как в области  $[0, a] \times [0, 2\pi]$  функции (1.17) ортогональны с весом  $r$ , то функции  $F_1(r, \theta, t)$ ,  $F_2(r, \theta, t)$ ,  $\varphi(r, \theta)$  и  $\psi(r, \theta)$  допускают следующие разложения:

$$\begin{aligned} F_1(r, \theta, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{mn}(t) W_{mn}(r, \theta), & F_2(r, \theta, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} v_{mn}(t) W_{mn}(r, \theta), \\ \varphi(r, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{mn}(t) W_{mn}(r, \theta), & \psi(r, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{mn}(t) W_{mn}(r, \theta), \end{aligned} \quad (1.20)$$

где

$$u_{mn}(t) = \int_0^a \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta, t) W_{mn}(r, \theta) r dr d\theta, \quad v_{mn}(t) = \int_0^a \int_0^{2\pi} F_2(r, \theta, t) W_{mn}(r, \theta) r dr d\theta,$$

$$\varphi_{mn} = \int_0^a \int_0^{2\pi} \varphi(r, \theta) W_{mn}(r, \theta) r dr d\theta, \quad \psi_{mn} = \int_0^a \int_0^{2\pi} \psi(r, \theta) W_{mn}(r, \theta) r dr d\theta.$$

Подставляя (1.19) и (1.20) в уравнение (1.1), умножая последнее на  $rW_{mn}(r, \theta)$  и интегрируя по  $r$  от нуля до  $a$ , а по  $\theta$  от нуля до  $2\pi$ , получим для определения функций  $T_{mn}(t)$  следующую систему дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\frac{d^2 T_{mn}(t)}{dt^2} = -\omega_{mn}^2 T_{mn}(t) + u_{mn}(t) + v_{mn}(t), \quad (m = 1, 2, \dots; n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.21)$$

с начальными условиями

$$T_{mn}(0) = \int_0^a \int_0^{2\pi} \varphi(r, \theta) W_{mn}(r, \theta) r dr d\theta = \varphi_{mn},$$

$$\dot{T}_{mn}(0) = \int_0^a \int_0^{2\pi} \psi(r, \theta) W_{mn}(r, \theta) r dr d\theta = \psi_{mn}. \quad (1.22)$$

Квадрат частоты собственных колебаний круглой пластинки имеет вид

$$\omega_{mn}^2 = \frac{Dg}{h\gamma} \frac{\lambda_{mn}^4}{a^4}. \quad (1.23)$$

Предполагаем, что силы  $F_1(r, \theta, t)$  и  $F_2(r, \theta, t)$  принадлежат классу  $L_2$  и удовлетворяют условиям

$$\left[ \int_0^a \int_0^{2\pi} [F_1(r, \theta, t)]^2 dr d\theta \right]^{1/2} = \left[ k \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} v_{mn}^2(t) \right]^{1/2} \leq P,$$

$$\left[ \int_0^a \int_0^{2\pi} [F_2(r, \theta, t)]^2 dr d\theta \right]^{1/2} = \left[ k \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} v_{mn}^2(t) \right]^{1/2} \leq Q \quad (1.24)$$

равномерно по  $t \in [0, T]$ . Здесь  $P, Q, T$  - заданные положительные числа,  $k$  - постоянная.

Рассмотрим следующую игровую задачу. Пусть первый игрок, распоряжающийся управлениями  $u_{mn}$  ( $m = 1, 2, \dots; n = 0, 1, 2, \dots$ ), стремится минимизировать значение величины

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [T_{mn}^2(\vartheta) + \dot{T}_{mn}^2(\vartheta)]$$

при самом упорном сопротивлении второго игрока, распоряжающегося управляющими воздействиями  $v_{mn}$  ( $m = 1, 2, \dots; n = 0, 1, 2, \dots$ ), а второй игрок, в свою очередь, стремится

максимизировать значение величины  $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [T_{mn}^2(\vartheta) + \dot{T}_{mn}^2(\vartheta)]$

при самом упорном сопротивлении со стороны первого игрока. Величину  $\vartheta$  ( $0 < \vartheta \leq T$ ) определим ниже. Динамика игры определяется бесконечной линейной системой дифференциальных уравнений (1.21).

Такая задача была рассмотрена в работе [5], где исследовано оптимальное управление механической системы мощности континуума, когда на континуум действуют противоборствующие силы. Задача приводилась к решению интегро-дифференциального уравнения с симметричным ядром и правой частью. На основании этой работы исследованы задачи, системы которых описываются частными производными высшей степени [6,7]. Настоящая работа основана на этих идеях.

2. С помощью метода экстремального прицеливания составим гипотетическое рассогласование. Так как собственные числа  $\lambda_{mn}$  ( $m = 1, 2, \dots; n = 0, 1, 2, \dots$ ) положительны, то вводя следующие обозначения:

$$z_{mn}^{(1)} = T_{mn}, \quad z_{mn}^{(2)} = \frac{\dot{T}_{mn}}{\sqrt{\lambda_{mn}}} \quad (m = 1, 2, \dots; n = 0, 1, \dots), \quad (2.1)$$

систему дифференциальных уравнений (1.21) можем записать в виде

$$\begin{cases} \dot{z}_{mn}^{(1)} = \sqrt{\lambda_{mn}} z_{mn}^{(2)}, \\ \dot{z}_{mn}^{(2)} = -\sqrt{\lambda_{mn}} z_{mn}^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_{mn}}} u_{mn} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_{mn}}} v_{mn} \quad (m = 1, 2, \dots; n = 0, 1, \dots). \end{cases} \quad (2.2)$$

**Определение.** Задачу для системы (2.2) назовем регулярной, если она регулярна для любых конечных  $m, n$  из (2.2).

Гипотетическое рассогласование для сформулированной игровой задачи будет [5]

$$\varepsilon^{(0)}(t, \{z_{mn}^{(1)}(t), z_{mn}^{(2)}(t)\}, T) = \max_{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [l_{mn}^{(1)} + l_{mn}^{(2)}] \leq 1} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [(l_{mn}^{(1)})^2 a_{mn} + (l_{mn}^{(2)})^2 b_{mn}] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \int_t^T \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \min_{u_{mn}^2 = P^2} \left[ (l_{mn}^{(1)})^2 \sin^2 \sqrt{\lambda_{mn}} (T - \tau) + \right. \\
& \left. + (l_{mn}^{(2)})^2 \cos^2 \sqrt{\lambda_{mn}} (T - \tau) \right] \cdot \frac{u_{mn}}{\sqrt{\lambda_{mn}}} d\tau + \\
& + \int_t^T \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \max_{v_{mn}^2 = Q^2} \left[ (l_{mn}^{(1)})^2 \sin^2 \sqrt{\lambda_{mn}} (T - \tau) + \right. \\
& \left. + (l_{mn}^{(2)})^2 \cos^2 \sqrt{\lambda_{mn}} (T - \tau) \right] \cdot \frac{v_{mn}}{\sqrt{\lambda_{mn}}} d\tau \Bigg\}, \tag{2.3}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
a_{mn} &= z_{mn}^{(1)} \cos \sqrt{\lambda_{mn}} (T - t) + z_{mn}^{(2)}(t) \sin \sqrt{\lambda_{mn}} (T - t), \\
b_{mn} &= z_{mn}^{(2)} \cos \sqrt{\lambda_{mn}} (T - t) - z_{mn}^{(1)}(t) \sin \sqrt{\lambda_{mn}} (T - t).
\end{aligned}$$

Используя метод неопределенных коэффициентов Лагранжа, для  $u_{mn}^{(0)}$  и  $v_{mn}^{(0)}$  получим [5,6]

$$\begin{aligned}
u_{mn}^{(0)}(\tau) &= - \frac{P \left[ l_{mn}^{(1)} \sin \sqrt{\lambda_{mn}} (T - \tau) + l_{mn}^{(2)} \cos \sqrt{\lambda_{mn}} (T - \tau) \right]}{\sqrt{\lambda_{mn}} \left[ \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{rj}} \left( l_{rj}^{(1)} \sin \sqrt{\lambda_{rj}} (T - \tau) + l_{rj}^{(2)} \cos \sqrt{\lambda_{rj}} (T - \tau) \right)^2 \right]^{1/2}}, \\
v_{mn}^{(0)}(\tau) &= \frac{Q \left[ l_{mn}^{(1)} \sin \sqrt{\lambda_{mn}} (T - \tau) + l_{mn}^{(2)} \cos \sqrt{\lambda_{mn}} (T - \tau) \right]}{\sqrt{\lambda_{mn}} \left[ \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{rj}} \left( l_{rj}^{(1)} \sin \sqrt{\lambda_{rj}} (T - \tau) + l_{rj}^{(2)} \cos \sqrt{\lambda_{rj}} (T - \tau) \right)^2 \right]^{1/2}}. \tag{2.4}
\end{aligned}$$

Подставляя значения  $u_{mn}^{(0)}(\tau)$  и  $v_{mn}^{(0)}(\tau)$  из (2.4) в (2.3), получим

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{(0)}(t, \{z_{mn}^{(1)}(t), z_{mn}^{(2)}(t)\}, T) &= \max_{\sum_{m,n=1}^{\infty} [(l_{mn}^{(1)})^2 + (l_{mn}^{(2)})^2] \leq 1} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [l_{mn}^{(1)} a_{mn} + l_{mn}^{(2)} b_{mn}] - \right. \\
& \left. - (P - Q) \int_t^T \left[ \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{rj}} \left( l_{rj}^{(1)} \sin \sqrt{\lambda_{rj}} (T - \tau) + l_{rj}^{(2)} \cos \sqrt{\lambda_{rj}} (T - \tau) \right)^2 \right]^{1/2} d\tau \right\}. \tag{2.5}
\end{aligned}$$

При условии  $P > Q$  выражение в фигурных скобках в формуле (2.5) является вогнутой функцией по переменным  $I_{ij}^{(1)}$  и  $I_{ij}^{(2)}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ;  $j = 0, 1, 2, \dots$ ), следовательно, максимум в (2.5) при любых  $z_{mn}^{(1)}(t)$ ,  $z_{mn}^{(2)}(t)$  достигается на единственном векторе  $(I_{mn}^{(1)})^0$ ,  $(I_{mn}^{(2)})^0$  ( $m = 1, 2, \dots$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots$ ), т.е. при любых начальных значениях игровая ситуация регулярна [7,8]. Получены уравнения, из которых определяются компоненты вектора  $I^0$  [5,6].

Заметим, что  $\varepsilon^{(0)}(t, \{z_{mn}^{(1)}(t), z_{mn}^{(2)}(t)\}, T)$  - ограниченная величина, так как ряды, участвующие в выражениях (2.5), сходятся, следовательно, оптимальные управляющие воздействия, определяемые формулой (2.4) равномерно по  $\tau \in [0, T]$ , составляют сходящиеся квадратом ряды [5,9]. Для определения момента  $\vartheta$  в каждой ситуации нужно найти наименьший корень уравнения

$$\min_{\tau \in [t_*, T]} \varepsilon^{(0)}(t_*, \{z_{mn}^{(1)}(t_*), z_{mn}^{(2)}(t_*)\}, \tau) = \varepsilon^{(0)}(t_*, \cdot, \vartheta). \quad (2.6)$$

3. Так как  $(I_{mn}^{(1)})^0$ ,  $(I_{mn}^{(2)})^0$ ,  $\varepsilon^{(0)}(t, \{z_{mn}^{(1)}(t), z_{mn}^{(2)}(t)\}, T)$ ,  $u_{mn}^{(0)}$  и  $v_{mn}^{(0)}$  ( $m = 1, 2, \dots$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots$ ) трудно представить в аналитической форме, то задачу решим численно.

Для численного примера возьмем круглую пластинку из стали, которая имеет следующие значения параметров:  $a = 0,2\text{м}$ ,  $h = 0,001\text{м}$ ,  $\rho = 7,9 \cdot 10^3 \text{кг/м}^3$ ,  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{Н/м}^2$ ,  $\mu = 0,3$ ,  $P = 8$ ,  $Q = 2$ ,  $t = 0$ . Ограничимся случаями  $m = 2$ , двумя узловыми окружностями, а узловые диаметры рассмотрим до  $n = 3$ .

Вычислены собственные числа  $\lambda_{mn}$  из уравнения (1.18), следовательно и квадрат частоты собственных колебаний круглой пластинки из (1.23) для  $m = 2$ ,  $n = 0, 1, 2, 3$ :

$$\begin{aligned} \lambda_{20} &= 5.03175, \quad \lambda_{21} = 6.66963, \quad \lambda_{22} = 8.13244, \quad \lambda_{23} = 9.48769, \\ \omega_{20} &= 304.767, \quad \omega_{21} = 535.469, \quad \omega_{22} = 796.107, \quad \omega_{23} = 1083.56. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Пусть начальный прогиб и начальная скорость срединной поверхности будут

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) &= \frac{1}{2 \cdot 10^{120}} r^2 \theta \sin \theta, \\ \psi(r, \theta) &= \frac{1}{1 \cdot 10^{120}} r \theta \sin \theta. \end{aligned} \quad (3.2)$$

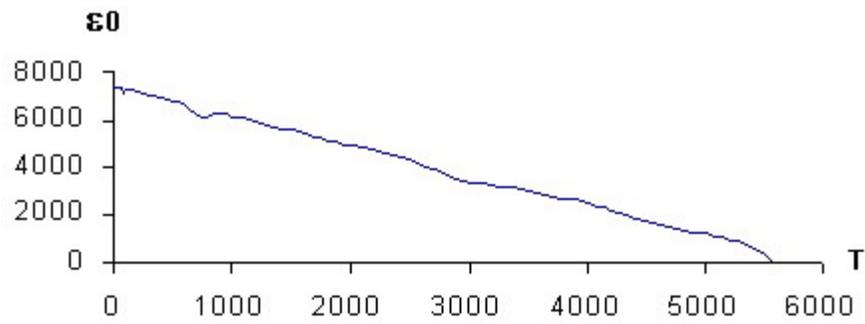


Рис. 1

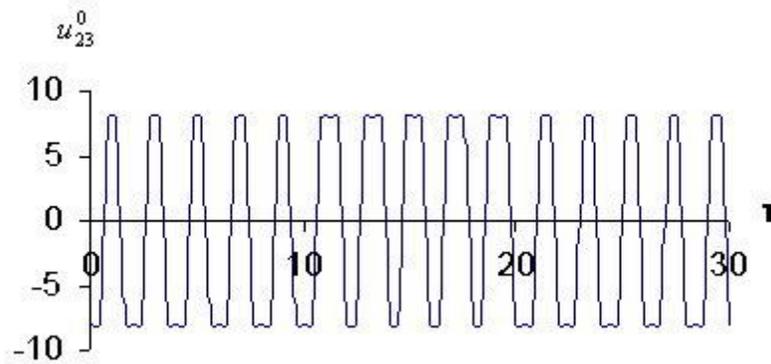


Рис. 2

Учитывая эти значения, с помощью программы «Mathematica 5.0» и «Microsoft Excel» численным методом вычислены  $(i_{mn}^{(1)})^0$ ,  $(i_{mn}^{(2)})^0$  ( $m = 2$ ,  $n = 0,1,2,3$ ), а следовательно вычислены гипотетическое рассогласование из (2.5), и оптимальные управляющие воздействия из (2.4).

На рис. 1-3 представлены зависимости  $\varepsilon^0\{T,0,6000\}$ ,  $u_{23}^0\{\tau,0,30\}$ ,  $v_{23}^0\{\tau,0,30\}$  соответственно.

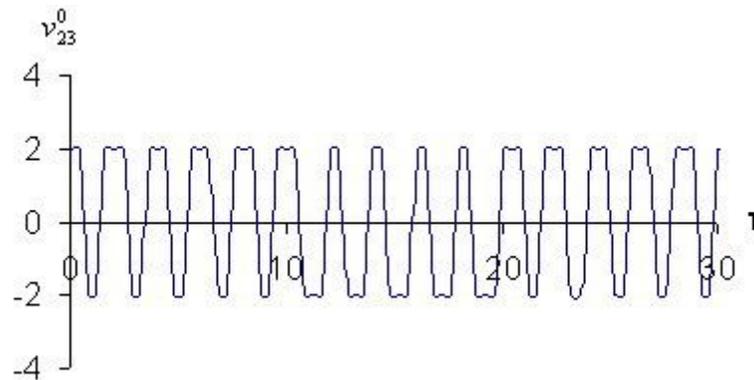


Рис. 3

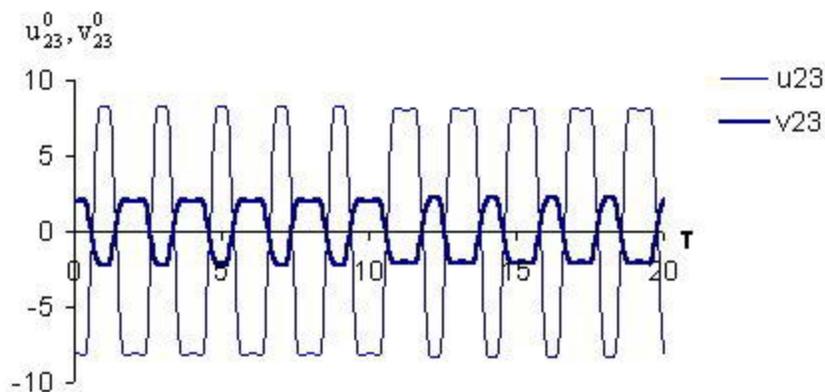


Рис. 4

Из рис. 4 видно, что  $u_{23}^0$  и  $v_{23}^0$  имеют противоположные знаки на том же интервале времени. Остальные оптимальные управляющие воздействия,  $u_{mn}^0 \{\tau, 0, 30\}$ ,  $v_{mn}^0 \{\tau, 0, 30\}$  ( $m = 2$ ,  $n = 0, 1, 2$ ) имеют тот же характер, что и  $u_{23}^0 \{\tau, 0, 30\}$  (рис.2) и  $v_{23}^0 \{\tau, 0, 30\}$  (рис. 3).

Из рис. 1-4 следует, что когда ресурсы первого игрока больше, чем второго ( $P > Q$ ), то задача всегда решается в пользу первого, т.е. первый игрок, распоряжающийся управлением  $u_{mn}^0$  ( $m = 2$ ,  $n = 0, 1, 2, 3$ ), гасит колебательное движение оболочки при самом упорном сопротивлении со стороны второго игрока  $v_{mn}^0$  ( $m = 2$ ,  $n = 0, 1, 2, 3$ ). А второй игрок, наоборот, при ( $P < Q$ ) может увеличить амплитуду колебаний.

Ереванский государственный университет

### Литература

1. Филиппов А.П. Колебания упругих систем. М. Наука. 1956.
2. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М. Гостехиздат. 1957.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М. Наука. 1972.
4. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. Ч. 1. М. ИЛ. 1949.
5. Габриелян М.С. - Изв. НАН РА. Механика. 1998. N 4. С. 72-76.
6. Мазманиян Л.А. В сб.: Оптимальное управление, устойчивость и прочность механических систем. Ереван. 2002. С. 48-52.
7. Габриелян М.С., Мазманиян Л.А. - Изв. НАН РА. Механика. 2005. Т. 58. N 3.
8. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М. Наука. 1974.
9. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории и функционального анализа. М. Наука. 1989.

**Մ. Ս. Գաբրիելյան, Լ. Ա. Մազմանյան**

**Հակամետ իրավիճակներում կլոր սալի տատանողական շարժման օպտիմալ  
ղեկավարման մասին**

Դիտարկված է կլոր սալի գծային տատանումների օպտիմալ ղեկավարման խնդիրը, երբ նրա վրա ազդում են բաշխված հակամետ ուժեր: Խնդրի լուծումը կառուցված է շարքի տեսքով համասեռ խնդրի սեփական ֆունկցիաների օգնությամբ և բերված է երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումներով բնութագրվող խաղային խնդրի: Խաղացողների օպտիմալ ղեկավարող ազդեցությունները որոշված են էքստրեմալ նշանառության եղանակով: Ցույց է տրված, որ եթե առաջին խաղացողի ռեսուրսները ավելի շատ են, քան երկրորդ խաղացողինը, և ազդող ուժերը պատկանում են  $L_2$  դասին, ապա լուծվում է կլոր սալի տատանումների մարման խնդիրը:

**M. S. Gabrielyan, L. A. Mazmanyan**

**On the Optimal Control of the Circular Plate's Vibrations in the Conflict Situations**

It is discussed the problem of an optimal control for the circular plate's linear vibrations, when the distributive disposed forces influence on it. The problem is solved by the method of variable division and it is brought to the differential game, which is described by the infinitesimal differential equations of second order. The extremal strategies are constructed by the extreme targeting method. It is shown that if the resources of the first player are more than the resources of the second player and the influencing forces belong to class  $L_2$ , then the problem of damping of plate's vibrations is solved.