УДК 539.3

А. А. Баблоян, В. О. Токмаджян

Плоская смешанная задача для упругого прямоугольника

(Представлено академиком Ф.Т. Саркисяном 21/VII 2005)

Ключевые слова: *теория упругости, метод Фурье, свободные коэффициенты интегрирования*

Рассматривается задача теории упругости для прямоугольника ($0 \le x \le l$, $0 \le y \le h$), две соседние стороны которого жестко заделаны, а на остальные две стороны действуют нагрузки. Для простоты будем считать, что на двух сторонах прямоугольника действуют только нормальные нагрузки. Граничные условия для данной задачи имеют вид

$$\begin{gathered} u(0,y) = v(0,y) = u(x,0) = v(x,0) = 0, \\ \sigma_x(1,y) = g(y),\ \ \tau_{xy}(1,y) = 0,\ \ \sigma_y(x,h) = f(x),\ \ \tau(x,h) = 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Известно, что плоская задача теории упругости сводится к определению бигармонической функции $\Phi(x,y)$ при заданных граничных условиях [1-3]. Напряжения и перемещения выражаются через бигармоническую функцию формулами

$$\begin{gathered} \sigma_x = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2},\ \ \sigma_y = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2},\ \ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}, \\ E[U(x,y) - U_0] = \int \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}dx - v\frac{\partial\Phi}{\partial x} - e_0 y, \\ E[V(x,y) - V_0] = \int \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}dy - v\frac{\partial\Phi}{\partial y} + e_0 y. \end{gathered} \tag{2}$$

Для данной задачи решение бигармонического уравнения представим в виде [4]

$$\begin{gathered} \Phi(x,y) = \frac{2}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(\alpha_k x)\sin\alpha_k y + \frac{2}{1}\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k(\beta_k y)\sin\beta_k x, \\ \alpha_k(z) = A_k^{(1)}\,\mathrm{sh}\,z + B_k^{(1)}x\,\mathrm{ch}\,z + z(C_k^{(1)}\,\mathrm{sh}\,z + D_k^{(1)}\,\mathrm{ch}\,z), \end{gathered} \tag{3}$$

$$\psi_k(z) = A_k^{(2)} \operatorname{sh} z + B_k^{(2)} \operatorname{ch} z + z(C_k^{(2)} \operatorname{sh} z + D_k^{(2)} \operatorname{ch} z),$$

$$\alpha_k = \frac{(2k-1)\pi}{2h}, \quad \beta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2l}.$$

Удовлетворяя граничным условиям (1), после ряда преобразований задачу сводим к решению четырех бесконечных систем линейных алгебраических уравнений

$$y_p^{(1)}P_1(\alpha_p l) - x_p^{(1)}Q_1(\alpha_p l) + \frac{4\alpha_p}{l}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\left[\frac{\alpha_p^2 - v\beta_k^2}{(\alpha_p^2+\beta_k^2)^2}x_k^{(2)} - \frac{(1+v)\alpha_p\beta_k(-1)^{p-1}}{(\alpha_p^2+\beta_k^2)^2}y_k^{(2)}\right] = 0,$$

$$y_p^{(2)}P_1(\beta_p h) - x_p^{(2)}Q_1(\beta_p h) + \frac{4\beta_p}{h}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\left[\frac{\beta_p^2 - v\alpha_k^2}{(\alpha_k^2+\beta_p^2)^2}x_k^{(1)} - \frac{(1+v)\alpha_k\beta_p(-1)^{p-1}}{(\alpha_k^2+\beta_p^2)^2}y_k^{(1)}\right] = 0,$$

$$x_p^{(1)}P_2(\alpha_p l) + y_p^{(1)}Q_2(\alpha_p l) + \frac{4\alpha_p}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\alpha_p\beta_k x_k^{(2)}}{(\alpha_p^2+\beta_k^2)^2} + \frac{(-1)^{p-1}(v\alpha_p^2-\beta_k^2)}{(1+v)(\alpha_p^2+\beta_k^2)^2}y_k^{(2)}\right] = g_p, \tag{4}$$

$$x_p^{(2)}P_2(\beta_p h) + y_p^{(2)}Q_2(\beta_p h) + \frac{4\beta_p}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\beta_p\alpha_k x_k^{(1)}}{(\alpha_k^2+\beta_p^2)^2} + \frac{(-1)^{p-1}(v\beta_p^2-\alpha_k^2)}{(1+v)(\alpha_k^2+\beta_p^2)^2}y_k^{(1)}\right] = f_p,$$

$$p = (1.2.3\ldots),$$

где введены следующие обозначения:

$$P_1(z) = (3-v)\operatorname{th} z - \frac{(1-v)z}{\operatorname{ch}^2 z}, \quad P_2(z) = \operatorname{th} z - \frac{z}{\operatorname{ch}^2 z},$$

$$Q_1(z) = \frac{2+(1+v)z\operatorname{th} z}{\operatorname{ch} z}, \quad Q_2(z) = \frac{2+(1+v)z\operatorname{th} z}{(1+v)\operatorname{ch} z},$$

$$g(p) = (-1)^{p-1}\int g(y)\sin\alpha_p y\,dy, \quad f_p = (-1)^{p-1}\int_0^1 f(x)\sin\beta_p x\,dx. \tag{5}$$

Неизвестные $x_k^{(p)}$, $y_k^{(p)}$ ($p = 1,2$; $k = 1,2,3,\ldots$) связаны с коэффицентами $A_k^{(P)}$, $B_k^{(P)}$, $C_k^{(P)}$,

$D_k^{(P)}$ соотношениями

$$
\begin{aligned}
&(1 + v)B_k^{(1)} + 2C_k^{(1)} = 0,\ \ (1 + v)B_k^{(2)} + 2C_k^{(2)} = 0,\\
&(A_k^{(1)} + D_k^{(1)})\ \mathrm{ch}\ \alpha_k l + (B_k^{(1)} + C_k^{(1)})\ \mathrm{sh}\ \alpha_k l + \alpha_k l(C_k^{(1)}\ \mathrm{ch}\ \alpha_k l + D_k^{(1)}\ \mathrm{sh}\ \alpha_k l) = 0,\\
&(A_k^{(2)} + D_k^{(2)})\ \mathrm{ch}\ \beta_k h + (B_k^{(2)} + C_k^{(2)})\ \mathrm{sh}\ \beta_k h + \beta_k h(C_k^{(2)}\ \mathrm{ch}\ \beta_k h + D_k^{(2)}\ \mathrm{sh}\ \beta_k h) = 0.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

На основании (6) функции $\varphi_k(\alpha_k x)$ и $\psi_k(\beta_k y)$ выражаются через неизвестные $x_k^{(p)}$, $y_k^{(p)}$ следующими окончательными формулами:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_k(\alpha_k x) = -\frac{(-1)^{k-1}x_k^{(1)}}{\alpha_k^2}\varphi_{1,k}(x) - \frac{(-1)^{k-1}y_k^{(1)}}{\alpha_k^2}\varphi_{2,k}(x),\\
&\psi_k(\beta_k y) = -\frac{(-1)^{k-1}x_k^{(2)}}{\beta_k^2}\psi_{1,k}(y) - \frac{(-1)^{k-1}y_k^{(2)}}{\beta_k^2}\psi_{2,k}(y),
\end{aligned}
\tag{7}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\varphi_{1,k}(x) = \frac{\mathrm{sh}\ \alpha_k x}{\mathrm{ch}\ \alpha_k x} + \alpha_k(l - x)\frac{\mathrm{ch}\ \alpha_k x}{\mathrm{ch}\ \alpha_k l} - \alpha_k l\frac{\mathrm{ch}\ \alpha_k(l - x)}{\mathrm{ch}^2\ \alpha_k l},\\
&\varphi_{2,k}(x) = \frac{2}{1 + v}\ \frac{\mathrm{ch}\ \alpha_k(l - x)}{\mathrm{ch}\ \alpha_k l} + \alpha_k x\frac{\mathrm{sh}\ \alpha_k(l - x)}{\mathrm{ch}\ \alpha_k l} + \alpha_k l\frac{\mathrm{sh}\ \alpha_k x}{\mathrm{ch}^2\ \alpha_k l},\\
&\psi_{1,k}(y) = \frac{\mathrm{sh}\ \beta_k y}{\mathrm{ch}\ \beta_k h} + \beta_k(h - y)\frac{\mathrm{ch}\ \beta_k y}{\mathrm{ch}\ \beta_k h} - \beta_k h\frac{\mathrm{ch}\ \beta_k(h - y)}{\mathrm{ch}^2\ \beta_k h},\\
&\psi_{2,k}(y) = \frac{2}{1 + v}\ \frac{\mathrm{ch}\ \beta_k(h - y)}{\mathrm{ch}\ \beta_k h} + \beta_k y\frac{\mathrm{sh}\ \beta_k(h - y)}{\mathrm{ch}\ \beta_k h} + \beta_k h\frac{\mathrm{sh}\ \beta_k y}{\mathrm{ch}^2\ \beta_k h}.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Формулы (2)-(8) дают окончательное решение рассматриваемой задачи.

Если из бесконечных систем (4) исключить неизвестные $x_p^{(1)}$, $y_p^{(1)}$ (или $x_p^{(2)}$, $y_p^{(2)}$), то получим систему для определения только неизвестных $x_p^{(2)}$, $y_p^{(2)}$ или $x_p^{(1)}$, $y_p^{(1)}$. После такого исключения нетрудно доказать, что полученные новые бесконечные системы вполне регулярны.

Ереванский государственный университет архитектуры и строительства

Литература

1. *Лейбензон Л.С.* Курс теории упругости. М. Л. ОГИЗ. 1947. 464 с.
2. *Гринченко В.Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Киев. Наукова думка. 1978. 264 с.
3. *Улитко А.Ф.* - Прикладная механика. 1967. Т. 3. N9. С. 1-12.
4. *Баблоян А.А., Мкртчян А.М.* - Изв. АН АрмССР. Механика. 1971. Т. 24. N5. С. 3-16.
5. *Баблоян А.А., Баблоян К.Б.* - Изв. НАН РА. Механика. 1995. Т. 48. N2. С. 72-83.

Ա.Հ. Բաբլոյան, Վ.Հ. Թոքմաջյան

Հարթ խառը խնդիր առաձգական ուղղանկյան համար

Դիտարկվում է առաձգականության տեսության խնդիր ուղղանկյունաձև մարմնի համար, որի երկու հարևան կողմերը ամրակցված են, իսկ մյուս երկու կողմերի վրա ազդում են արտաքին նորմալ ուժեր: Պարզության համար ենթադրվում է, որ արտաքին շոշափող ուժերը բացակայում են:

Խնդիրը լուծվում է Ֆուրիեի եղանակով: Լուծումը ներկայացվում է Ֆուրիեի երկու շարքերի գումարի տեսքով, որոնցից յուրաքանչյուրը պարունակում է չորս խումբ կամայական գործակից-ներ: Այդ գործակիցների մի մասը որոշվում է ճշգրիտ, իսկ մնացած մասի որոշման համար ստացվել են գծային անվերջ հավասարումների չորս համակարգեր: Ապացուցվում է, որ անվերջ համակարգերը լիովին կանոնավոր են, իսկ նրանց ազատ անդամները ձգտում են զրոյի, եթե արտաքին նորմալ լարումները տրված են սահմանափակ ֆունկցիաների տեսքով:

Հետևաբար անվերջ համակարգերը կարելի է լուծել կամ հաջորդական մոտավորությունների միջոցով, կամ ռեդուկցիայի միջոցով:

A.H. Babloyan, V.H. Tokmajyan

Flatmixed Problem for Elastic Rectangle

The flat problem of elasticity theory for rectangle, two sides of which are fastened and the other two sides are under the influence of external tangent loadings is considered. For simplicity it is assumed that external tangent loadings are absent.

The task is solved by means of Furie method. The solution is presented in a form of the sum of the two Furie rows, each of them contains four groups of free coefficient of integration. A part of free coefficients is precisely determined, but for the determination of remain coefficients of Furie rows the collection of four infinite systems of linear algebraic equations is obtained. It is proved that infinite systems are quite regular and their free members are tending to zero. Consequently, infinite systems could be solved either through the method of progressive approximation or the method of reduction.