

УДК 517.984.5

А. А. Асатрян

Исследование точечного спектра и обратной задачи рассеяния для оператора Штурма - Лиувилля с потенциалом, имеющим определенное поведение на бесконечности

(Представлено чл.-кор. НАН РА Г.Г. Геворкяном 15/VI 2005)

Ключевые слова: спектр, обратная задача, дифференциальный оператор, данные рассеяния, собственная функция

Рассмотрим на $R = (-\infty, \infty)$ дифференциальную операцию L , заданную формулой $Ly = -y'' + qy$, где коэффициент (потенциал) q - вещественная измеримая функция от переменной $x \in R$, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^0 (1-x)|q(x) - a^-|dx + \int_0^{\infty} (1+x)|q(x) - a^+|dx < \infty$$

с некоторыми постоянными $a^{\pm} \in R$. Действующий в пространстве $L^2(R)$ оператор L определим следующим образом (см. [1], с. 192). Область D определения оператора L состоит из функций $y \in L^2(R)$, имеющих абсолютно непрерывные на каждом отрезке $[\alpha, \beta] \subset R$ первые производные и $Ly \in L^2(R)$. Для $y \in D$ по определению полагается $Ly = L(y)$. Оператор L является самосопряженным (см. [2]).

Обозначим $\mu_1 = \min\{a^+, a^-\}$, $\mu_2 = \max\{a^+, a^-\}$, $\mu_3 = \infty$.

Теорема 1. *Собственные значения оператора L (если таковые имеются) простые, лежат в интервале $(-\infty, \mu_1)$ и их число конечно.*

В случае $a^+ = a^- = 0$ обратная задача рассеяния для оператора L рассмотрена Л. Д. Фаддеевым (см. [3]; [4], с. 264-279), а при $a^+ = a^- \neq 0$ легко приводится к указанному случаю. Поэтому мы будем считать $a^+ \neq a^-$.

Обозначим $\lambda_j^{\pm} = (-1)^{j-1} \sqrt{\mu - a^{\pm}}$. ($\mu > \mu_1$; $j = 1, 2$) (для корня берется главное значение). Для $\mu \in R$ обозначим через $r^{\pm}(\mu)$ половину числа вещественных корней уравнения $\lambda^2 + a^{\pm} = \mu$. Очевидно, что функции $r^+(\mu)$ и $r^-(\mu)$ постоянны в каждом интервале (μ_k, μ_{k+1}) , $k = 1, 2$. Для каждого $k = 1, 2$ обозначим через $r_k^{\pm}$ значение функции $r^{\pm}(\mu)$ в интервале (μ_k, μ_{k+1}) .

Для каждого $k = 1, 2$ при $\mu \in (\mu_k, \mu_{k+1})$ уравнение $l(\varphi) = \mu\varphi$ имеет k линейно независимых ограниченных решений $\varphi_j(x, \mu)$ ($x \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq k$). Для этих решений справедливы асимптотические равенства

$$\varphi_j(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{v=1}^{1+r_k^+} \sqrt{|\lambda_v^{'+}(\mu)|} A_{jv}^+(\mu) e^{ix\lambda_v^{'+}(\mu)} [1 + o(1)], \quad x \rightarrow \infty,$$

$$\varphi_j(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{v=2-r_k^-}^2 \sqrt{|\lambda_v^{-}(\mu)|} A_{jv}^-(\mu) e^{ix\lambda_v^{-}(\mu)} [1 + o(1)], \quad x \rightarrow -\infty.$$

При этом если обозначить

$$B_{jv}(\mu) = \begin{cases} A_{jv}^+(\mu), & 1 \leq v \leq r_k^+ \\ A_{j, v-r_k^++r_k^-}^-(\mu), & r_k^+ < v \leq k, \end{cases} \quad C_{jv}(\mu) = \begin{cases} A_{jv}^-(\mu), & 1 \leq v \leq r_k^- \\ A_{j, v+r_k^+-r_k^-}^+(\mu), & r_k^- < v \leq k, \end{cases}$$

$$(1 \leq j \leq k)$$

то матрицы

$$B(\mu) = (B_{jv}(\mu))_{j,v=1}^k, \quad C(\mu) = (C_{jv}(\mu))_{j,v=1}^k$$

невырожденные и связаны соотношением

$$B(\mu)B^*(\mu) = C(\mu)C^*(\mu). \quad (1)$$

В качестве одной из этих матриц можно взять произвольную невырожденную матрицу, а по ней другая матрица и решения $\varphi_j(x, \mu)$ определяются однозначно. Из (1) следует, что если одна из матриц $B(\mu)$, $C(\mu)$ унитарна, то другая тоже унитарна. Впредь будем предполагать, что матрицы $B(\mu)$, $C(\mu)$ унитарны, а их элементы измеримые функции (в частности, в качестве одной из них можно взять единичную матрицу). При такой нормировке систему решений $\varphi_j(x, \mu)$ ($\mu \in (\mu_k, \mu_{k+1})$, $1 \leq j \leq k$) будем называть нормированной системой обобщенных собственных функций оператора L , соответствующей значению μ . При помощи $\varphi_j(x, \mu)$ и собственных функций оператора L осуществляется разложение Фурье (см. [5]).

Теперь, опираясь на асимптотическое поведение обобщенных и обычных собственных функций, введем данные рассеяния для оператора L .

Обозначим

$$S_{lv}^+(\mu) = \sum_{j=1}^k \sqrt{|\lambda_v^{'+}(\mu)|} \sqrt{|\lambda_l^{'+}(\mu)|} A_{jv}^+(\mu) \overline{A_{jl}^+(\mu)} \quad (\mu \in (\mu_k, \mu_{k+1}); 1 \leq l, v \leq 1+r_k^+; k = 1, 2)$$

и рассмотрим матрицу $S^+(\mu) = (S_{lv}^+(\mu))_{l,v=1}^{1+r^+(\mu)}$. $S^+(\mu)$ представляет собой квадратную матрицу порядка $1 + r^+(\mu)$, которая не зависит от выбора нормированной системы обобщенных

собственных функций, причем матрица-функция S^+ непрерывно дифференцируема в интервалах (μ_1, μ_2) и (μ_2, μ_3) .

Обозначим через T точечный спектр оператора L . Пусть $\mu \in T$, а ψ - соответствующая нормированная собственная функция. Тогда для ψ имеет место асимптотическое равенство

$$\psi(x, \mu) = c^+(\mu) e^{ix\lambda_1^+(\mu)} [1 + o(1)], \quad x \rightarrow \infty,$$

где $c^+(\mu)$ - ненулевое комплексное число. Обозначим $N^+(\mu) = |c^+(\mu)|^2$ ($\mu \in T$). Легко видеть, что числа $N^+(\mu)$ не зависят от выбора нормированных собственных функций ψ .

Рассмотрим набор данных

$$\{T, N^+(\mu)(\mu \in T), S^+(\mu)(\mu \in (\mu_1, \mu_2) \cup (\mu_2, \mu_3))\}, \quad (2)$$

называемых правыми данными рассеяния оператора L .

Обратная задача рассеяния для оператора L состоит в восстановлении потенциала q по данным (2).

По аналогии работ [6, 7] с помощью данных рассеяния введем функцию

$$\begin{aligned} \tilde{F}^+(x, t) = & \sum_{\mu \in T} \frac{N^+(\mu)}{|\lambda_1^+(\mu)|^2} \left(e^{ix\lambda_1^+(\mu)} - 1 \right) \left(e^{it\lambda_1^+(\mu)} - 1 \right) + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{\mu_1}^{\infty} \sum_{v,j=1}^{1+r^+(\mu)} \frac{S_{jv}^+(\mu)}{\lambda_v^+(\mu) \overline{\lambda_j^+(\mu)}} \left(e^{ix\lambda_v^+(\mu)} - 1 \right) \left(e^{it\lambda_j^+(\mu)} - 1 \right) d\mu - \min\{x, t\} \quad (x, t \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

(интеграл сходится в обычном смысле).

Сформулируем теорему, согласно которой потенциал q определяется однозначно по данным рассеяния, и вопрос его восстановления сводится к решению линейного интегрального уравнения.

Теорема 2. *Существует непрерывная производная $F^+(x, t) = [(\partial^2 \tilde{F}^+(x, t))/(\partial x \partial t)]$ ($x, t \in \mathbb{R}$), причем функция $F^+(x, t)$ вещественна и симметрична ($F^+(x, t) = F^+(t, x)$, $x, t \in \mathbb{R}$), а для каждого $x \in \mathbb{R}$ линейное интегральное уравнение*

$$K^+(x, t) + F^+(x, t) + \int_z^\infty K^+(x, \xi) F^+(\xi, t) d\xi = 0 \quad (t \in [x, \infty))$$

имеет единственное решение $K^+(x, \cdot)$ в любом из классов $L^p(x, \infty)$, $1 \leq p \leq \infty$ и имеют место равенства

$$a^+ = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \left[\mu - \frac{1}{4[S_{11}^+(\mu)]^2} \right],$$

$$q(x) = a^+ - 2 \frac{d}{dx} K^+(x, x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Автор приносит глубокую благодарность профессору И. Г. Хачатряну за постановку задачи и полезные обсуждения результатов.

Ереванский государственный университет

Литература

1. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М. Наука. 1969.
2. *Петросян А. Г.* - Уч. зап. ЕГУ. 2003. N 3. С. 8-15.
3. *Фаддеев Л. Д.* - Труды Мат. ин-та АН СССР. 1964. Т. 73. С. 314-336.
4. *Марченко В. А.* Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев. Наукова думка. 1977.
5. *Петросян А. Г., Хачатрян И. Г.* - Уч. зап. ЕГУ. 2004. N 1. С. 22-27.
6. *Хачатрян И. Г.* - Изв. АН Арм. ССР. Математика. 1983. Т. 18. N 5. С. 394-402.
7. *Бабасян С. В.* - Уч. зап. ЕГУ. 1989. N 3 (171).

Հ. Ա. Ասատրյան

**Անվերջությունում որոշակի վարք ունեցող պոտենցիալով Շտուրմ - Լիուվիլի
օպերատորի կետային սպեկտրի և այդ օպերատորի համար ցրման հակադարձ խնդրի
ուսումնասիրությունը**

Դիտարկվում է անվերջությունում որոշակի վարք ունեցող պոտենցիալով Շտուրմ - Լիուվիլի օպերատորը $L^2(R)$ տարածությունում: Ուսումնասիրվում է նրա կետային սպեկտրը, և ներմուծվում են ցրման տվյալները: Ապացուցվում է, որ ցրման տվյալների միջոցով պոտենցիալը որոշվում է միարժեքորեն, իսկ նրա վերականգնման հարցը հանգեցվում է գծային ինտեգրալ հավասարման լուծմանը:

H. A. Asatryan

**Analysis of Point Spectrum and the Inverse Scattering Problem for the Sturm - Liouville
Operator with Certain Behavior of Potential at Infinity**

In the space $L^2(R)$ the Sturm - Liouville operator with certain behavior of potential at infinity is considered. Its point spectrum was studied and the scattering data were introduced. It is proved that the potential is uniquely determined by the scattering data and the question of its recovery is reduced to the linear integral equation.