УДК 517.518

Академик А. Б. Нерсесян, Р. Г. Бархударян

Ускорение сходимости разложения по собственным функциям одной модельной краевой задачи с разрывным коэффициентом

(Представлено 15/VI 2005)

Ключевые слова: *краевые задачи, ускоренная сходимость, разложения по собственным функциям*

1. Введение. Хорошо известно, что классический ряд Фурье на отрезке $[a,b]$, $-\infty < a < b < \infty$, сходится медленно, если разлагаемая функция $f(x)$, продолженная на всю действительную ось $(b - a)$-периодически, не обладает достаточной гладкостью. Это прежде всего относится к кусочно-гладким функциям.

Решение практически важной проблемы ускорения сходимости разложений таких функций в ряд Фурье, - по-видимому, впервые, - предложил А. Крылов в 1907 г. (см. [1]). Начало систематическому обоснованию такого подхода положила в 1964 г. работа Ланцоша [2] (см. также [3-7]). Практически эффективные алгоритмы были разработаны за последние 15 лет главным образом в работах К. Экгофа и Д. Готтлиба с соавторами (см., например, [8,9]). Этот подход (алгоритм) назовём КЕГ-методом.

В работе [13] был разработан другой, нелинейный метод ускорения сходимости рядов Фурье, основанный на применении аппроксимантов Паде к асимптотическому ряду коэффициентов, что привело к еще более точным и устойчивым алгоритмам (квазиполиномиальный (QP) метод). К тому же стало возможным эффективно выявлять колебания произвольной частоты (в том числе затухающие или нарастающие), являющиеся "скрытыми" компонентами разлагаемой функции.

Ниже приводятся некоторые теоретические оценки и явные формулы, связанные с последним подходом, в применении к краевой задаче для простейшего дифференциального уравнения с разрывным коэффициентом.

Отметим, что изучению задач подобного типа, - с точки зрения вычисления собственных значений и собственных функций, - посвящена работа [4].

2. Постановка задачи. Рассмотрим краевую задачу

$$i\frac{du}{dx} = \lambda\varepsilon(\xi,x)u(x), \tag{1}$$

$$u(-1) = u(1), \tag{2}$$

где $\xi \in (-1,1)$, $b \in \mathbf{R}^+$

$$\varepsilon(\xi,x) = \begin{cases} 1, & x \in (-1, \xi) \\ b^2, & x \in [\xi, 1). \end{cases}$$

Легко видеть, что собственные значения этой задачи имеют явный вид $\lambda_k = -\pi\eta k$, где $k \in \mathbf{Z}$ и $\eta = [(2\pi)/(1+\xi+b^2(1-\xi))]$, а система собственных функций $\{\phi_n\}$ следующая:

$$\phi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta}{2\pi} e^{i\eta n(1+x)}, & x \in [-1, \xi] \\ \dfrac{\eta}{2\pi} e^{i\eta n(1+\xi+b^2(x-\xi))}, & x \in (\xi,1]. \end{cases} \tag{3}$$

Система собственных функций сопряженной задачи имеет вид

$$\psi_n(x) = \begin{cases} e^{+i\eta n(1+x)}, & x \in [-1, \xi] \\ b^2 e^{+i\eta n(1+\xi+b^2(x-\xi))}, & x \in (\xi,1]. \end{cases} \tag{4}$$

Введем обозначения

$$f_n = (f, \psi_n) = \int_{-1}^{1} f(x)\,\overline{\psi_n(x)}\,dx, \tag{5}$$

$$A_k = \frac{f^{(k)}(1)}{b^{2k}} - f^{(k)}(-1), \quad B_k = \frac{f^{(k)}(\xi+0)}{b^{2k}} - f^{(k)}(\xi-0), \tag{6}$$

Лемма 1. *Пусть* $f \in C^{q+1}$ *на каждом из отрезков* $[-1,\xi],[\xi,1]$. *Тогда*

$$f_n = \sum_{k=0}^{q} \frac{e^{-i\eta n(1+\xi)} B_k}{(i\eta n)^{k+1}} - \sum_{k=0}^{q} \frac{A_k}{(i\eta n)^{k+1}} + F_n, \tag{7}$$

где

$$F_n = \frac{1}{(i\eta n)^{(q+1)}} \int_{-1}^{1} \frac{f^{q+1}(x)}{\varepsilon(\xi,x)^{(q+1)}}\,\overline{\psi_n(x)}\,dx. \tag{8}$$

Доказательство.

$$f_n = (f, \psi_n) = \int_{-1}^{1} f(x)\,\overline{\psi_n(x)}\,dt = \int_{-1}^{\xi} f(x)\,\overline{\psi_n(x)}\,dx + \int_{\xi}^{1} f(x)\,\overline{\psi_n(x)}\,dx = \tag{9}$$

$$\int_{-1}^{\xi} f(x) e^{-i\eta(1+x)} dx + b^2 \int_{\xi}^{1} f(x) e^{-i\eta n(1+\xi+b^2(x-\xi))} dx. \tag{10}$$

Интегрируя последние интегралы по частям, получим желаемый результат.

Нам понадобится также следующая

Лемма 2 [13]. *Пусть* $\{\alpha_s\}$, $s = 1, ..., q$, $1 \le q < \infty$, - *некоторое конечное множество комплексных чисел и* $Y \subseteq \{\alpha_s\}$ - *подмножество целых чисел (возможно, пустое). Тогда справедлива формула*

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ k \notin Y}}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} p(k) \exp(i\pi kx)}{\prod_{s=1}^{l}(k-\alpha_s)^{\beta_s}} = \pi \sum_{r=1}^{l} \operatorname*{Res}_{z=\alpha_r} \frac{p(z) \exp i\pi z x^{\ddagger}}{\sin(\pi z) \prod_{s=1}^{l}(z-\alpha_s)^{\beta_s}},$$

где $\{\beta_s\}$,$(s = 1, ..., q)$ - *множество положительных целых чисел,* $p(z)$ - *многочлен степени не выше* $\sum_{s=1}^{q} \beta_s - 1$ *и принято обозначение* $x^{\ddagger} = (x + 1) \pmod 2 - 1$, $-1 < x^{\ddagger} < 1$.

3. Приведем краткое описание аналога КЕГ-метода (ниже, в применении к системе (3), его будем называть А-методом) в случае, когда $f \in C^{q+1}$ на каждом из отрезков $[-1,\xi]$,$[\xi,1]$. Используя леммы 1 и 2, можно представить функцию f в виде ($\eta = [(2\pi)/(1+\xi+b^2(1-\xi))]$)

$$f(x) = P(x) + Q(x) + F(x), \tag{11}$$

где

$$P(x) = \sum_{k=0}^{q} \frac{\eta A_k}{2(i\eta)^{k+1}} \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{e^{i\pi z([(\eta)/(\pi)]\upsilon(x)+1)^{\ddagger}}}{\sin(\pi z) z^{k+1}}, \tag{12}$$

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{q} \frac{\eta B_k}{2(i\eta)^{k+1}} \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{e^{i\pi z([(\eta)/(\pi)](\upsilon(x)-\xi-1)+1)^{\ddagger}}}{\sin(\pi z) z^{k+1}}, \tag{13}$$

$$\upsilon(x) = 1 + x\varepsilon(\xi,x) + \frac{b^2+1}{b^2-1}\xi(\varepsilon(\xi,x) - 1). \tag{14}$$

Очевидно (см. (8)), коэффициенты Фурье $\{F_n\}$ функции $F(x)$ имеют порядок убывания, равный, по меньшей мере, $o(N^{-q-1})$, $N \to \infty$. Отсюда следует, что аппроксимационная формула

$$S_{N,q}(x) = P(x) + Q(x) + \sum_{n=-N}^{N} F_n \phi_n(x) \tag{15}$$

сходится (в равномерной метрике) к f со скоростью порядка $o(N^q)$, $N \to \infty$.

4. Переходя к описанию аналога метода QP (ниже будем его называть B-методом), рассмотрим конечные последовательности комплексных чисел $\theta = \{\theta\}_{k=1}^{m}$, $A = \{A_k\}_{k=1}^{m}$, $p \ge 1$ и обозначим

$$\Delta_k^0(A,\theta) = A_k, \quad \Delta_k^s(A,\theta) = \Delta_k^{s-1}(A,\theta) + \theta_s \Delta_{k-1}^{s-1}(A,\theta), \quad k \ge 1. \tag{16}$$

Если $k < 0$, то примем $\Delta_k^s(A,\theta) = 0$.

Лемма 3. *Пусть* $f \in C^{q+1}$ *на каждом из отрезков* $[-1,\xi]$, $[\xi,1]$ *и* $m \in \mathbf{N}$, $m < q$. *Тогда* $f_n = \widetilde{P}_n + \widetilde{Q}_n$, *где*

$$\widetilde{Q}_n = \sum_{k=0}^{q-m} \frac{B_k e^{-i\eta n}}{(i\eta n)^{k+1}} - \frac{e^{-i\eta n}}{(i\eta n)^{q-m+1}} \sum_{k=1}^{m} \frac{\theta''_k \Delta_{q-m}^{k-1}(B,\theta'')}{\prod_{s=1}^{k}\left(1-\frac{\theta''_s}{i\eta n}\right)} -$$

$$\sum_{k=0}^{q-m} \frac{A_k}{(i\eta n)^{k+1}} + \frac{1}{(i\eta n)^{q-m+1}} \sum_{k=1}^{m} \frac{\theta'_k \Delta_{q-m}^{k-1}(A,\theta')}{\prod_{s=1}^{k}\left(1-\frac{\theta'_s}{i\eta n}\right)}, \tag{17}$$

$$\widetilde{P}_n = -\frac{e^{-i\eta n(1+\xi)}}{(i\eta n)^{q-m+2}} \sum_{k=1}^{m} \frac{\theta''_k \Delta_q^{k-1}(B,\theta'')}{\prod_{s=1}^{k}\left(1-\frac{\theta''_s}{i\eta n}\right)} +$$

$$\frac{e^{-i\eta n(1+\xi)}}{\prod_{s=1}^{m}\left(1-\frac{\theta''_s}{i\eta n}\right)} \sum_{k=q-m+1}^{q} \frac{\Delta_k^m(B,\theta'')}{(i\eta n)^{k+1}} + \frac{1}{(i\eta n)^{q-m+2}} \sum_{k=1}^{m} \frac{\theta'_k \Delta_q^{k-1}(A,\theta')}{\prod_{s=1}^{k}\left(1-\frac{\theta'_s}{i\eta n}\right)} +$$

$$\frac{1}{\prod_{s=1}^{m}\left(1-\frac{\theta'_s}{i\eta n}\right)} \sum_{k=q-m+1}^{q} \frac{\Delta_k^m(A,\theta')}{(i\eta n)^{k+1}} + F_n, \tag{18}$$

$$F_n = \frac{1}{(i\eta n)^{(q+1)}} \int_{-1}^{1} \frac{f^{q+1}(x)}{\varepsilon(\xi,x)^{(q+1)}} \psi_n(x)dx. \tag{19}$$

Доказательство. Нетрудно проверить следующее тождество ($x \neq -\theta_1^{-1}$):

$$\sum_{k=q-m+1}^{q} A_k x^k = x^{q+1}\theta_1 \frac{A_q - A_{q-m}x^{-m}}{1+\theta_1 x} + \frac{1}{1+\theta_1 x} \sum_{k=q-m+1}^{q} (A_k + \theta_1 A_{k-1})x^k. \tag{20}$$

После m-кратного применения того же преобразования придем к формуле

$$\sum_{k=q-m+1}^{q} A_k x^k = -x^{q-m+1} \sum_{k=1}^{m} \frac{\theta_k \Delta_{q-m}^{k-1}(\theta)}{\prod_{s=1}^{k}(1+\theta_s x)} + x^{q+1} \sum_{k=1}^{m} \frac{\theta_k \Delta_q^{k-1}(\theta)}{\prod_{s=1}^{k}(1+\theta_s x)} +$$

$$+ \frac{1}{\prod_{k=1}^{m}(1+\theta_s x)} \sum_{k=q-m+1}^{q} \Delta_k^m(\theta)^k, \quad x \notin \{-\theta_k^{-1}\}. \tag{21}$$

Доказательство завершается, если главную часть формулы (7) разделим на четыре суммы

$$f_n = \sum_{k=q-m+1}^{q} \frac{e^{-i\eta n(1+\xi)}B_k}{(i\eta n)^{k+1}} - \sum_{k=q-m+1}^{q} \frac{A_k}{(i\eta n)^{k+1}} + \sum_{k=0}^{q-m} \frac{e^{-i\eta n(1+\xi)}B_k}{(i\eta n)^{k+1}} - \sum_{k=0}^{q-m} \frac{A_k}{(i\eta n)^{k+1}} + F_n,$$

и применим преобразование (21) к первым двум слагаемым, с заменой x на $(i\eta n)^{-1}$.

Из лемм 2 и 3 следует, что функцию f можно представить в виде

$$f(x) = \widetilde{Q}(x) + \widetilde{P}(x), \quad \widetilde{Q}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widetilde{Q}_n \varphi_n(x), \qquad \widetilde{P}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widetilde{P}_n \varphi_n(x),$$

где $\widetilde{Q}(x)$ - квазиполином, т.е. конечная линейная комбинация функций вида $b(x)e^{c\,x}$, где b(x)

многочлен, c = (const) $\in$ **C**. Если же векторы θ' и θ'' определить из систем

$$\Delta_k^m(A,\theta') = 0, \quad k = q - m + 1, \ldots, q, \tag{22}$$

$$\Delta_k^m(B,\theta'') = 0, \quad k = q - m + 1, \ldots, q, \tag{23}$$

то P(x) станет q раз непрерывно дифференцируемой на действительной оси и 2-периодической функцией. В этом случае аппроксимационная формула

$$\widetilde{S}_{N,q,m}(x) = \widetilde{Q}(x) + \sum_{n=-N}^{N} \widetilde{P}_n \varphi_n(x) \tag{24}$$

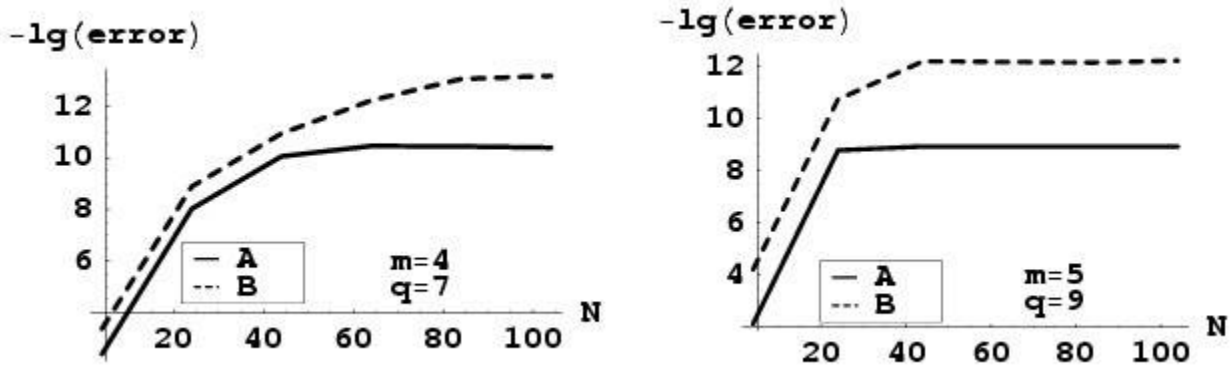
сходится к f со скоростью порядка $o(N^{-q})$, $N \to \infty$. По сути, мы применили к асимптотическим степенным (по $z = (i\eta n)^{-1}$) рядам (7) аппроксимации Паде порядка [(q – m)/m] (см. [14]).

5. В случае, когда b = 1, наш ряд превращается в обыкновенный ряд Фурье, а кусочно-квазиполиномиальные функции P(x) и Q(x) становятся обобщенными полиномами Бернулли. Таким образом, метод A является обобщением КЕГ-метода и, соответственно, метод B - обобщением QP-метода.

Для того чтобы изучаемый ряд функции f сходился "хорошо", достаточно потребовать, чтобы функция f, продолженная на всю действительную ось 2-периодически, была достаточно гладкой (кроме точек 2n – 1 и ξ + 2n, где n $\in$ **Z**) и чтобы в точках x = 2n – 1 и x = ξ + 2n, n $\in$ **Z**, выполнялись равенства $[(f^{(k)}(x+0))/(b^{2k})] = f^{(k)}(x-0)$, k = 0, 1, ..., q.

6. Численные эксперименты проведены на компьютере с процессором Pentium 4, 512MB RAM, с применением компьютерной системы MATHEMATICA [15]. Для иллюстрации свойств методов A и B рассмотрим следующую функцию:

$$f(x) = \begin{cases} \sin(3x+1), & x \in [-1, 1/3) \\ \dfrac{1}{1.2 - x}, & x \in [1/3, 1]. \end{cases} \tag{25}$$



Десятичные логарифмы обратных величин равномерных ошибок при аппроксимации функции (25) (b = 2, ξ = [1/3]).

На рисунке указаны порядки равномерных ошибок при аппроксимации функции (25) методами A и B для различных значений N. Левый рисунок соответствует случаю q = 5, m = 3, правый - случаю q = 7, m = 4.

На этих примерах хорошо просматривается явное преимущество B-метода как в смысле

точности, так и в смысле устойчивости к накоплению ошибок.

Эти и другие результаты хорошо согласуются с результатами работы [13] и могут служить основанием для рекомендации алгоритма B к практическому применению. Приближенные скачки A_k, B_k могут быть вычислены по коэффициентам $\{f_n\}$, $|n| \le N < \infty$ аналогично работе [13].

Институт математики НАН РА

Литература

1. *Крылов А.* О приближенных вычислениях. Лекции, читанные в 1906 г. СПб. Типилитогр. К. Биркенфельда. 1907. 228 с.
2. *Lanczos C.* - J. Soc. Indust. Appl. Math., Ser. B Numer. Anal. 1964. V. 1. P. 76-85.
3. *Lanczos C.* Discourse of Fourier Series. Hafner. N.-Y. 1966.
4. *Min M.S., Gottlieb D.* - SIAM J. Numer. Anal. 2003. V. 40. N. 6. P. 2254-2269
5. *Jones W.B., Hardy G.* - Math. Comp. 1970. V. 24. P. 47-60.
6. *Lyness J.N.* - Math. Comp. 1974. V. 28. P. 81-123.
7. *Tasche M.* - Math. Nachr. 1979. V. 90. P. 123-134.
8. *Baszenski G., Delvos F.J., Tasche M.* - Computers and Mathematics with Applications 1995. V. 30. N 3-6. P 33-49.
9. *Gottlieb D., Shu C.W.* - Math. Comp. 1992. V. 43. P. 81-92.
10. *Eckhoff K.S.* - Math. Comp. 1995. V. 64. N 210. P. 671 - 690.
11. *Eckhoff K.S., Wasberg C.E.* - Report no. 99. Dept. of Math. University of Bergen. 1995. P. 1-38.
12. *Gelb A., Gottlieb D.* - Computers Math. Applic. 1997. V. 33. N 11. P. 35-58.
13. *Нерсесян А.Б.* - ДНАН Армении. 2004. Т. 104. N. 4. С. 186-191.
14. *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. М. Мир. 1986. 502 с.
15. *Wolfram S.* The MATHEMATICA book. Fourth Edition. Wolfram Media. Cambridge University Press. 1999. 1468 p.

Ակադեմիկոս Ա. Բ. Ներսեսյան, Ռ. Հ. Բարխուդարյան

Խզվող գործակցով մի մոդելային եզրային խնդրի՝ սեփական ֆունկցիաներով վերլուծության զուգամիտության արագացման մասին

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է խզվող գործակցով մի պարզագույն դիֆերենցիալ հավասարման՝ սեփական ֆունկցիաներով վերլուծության զուգամիտության արագացման խնդիրը: Առաջարկված են արագացման երկու եղանակներ: Առաջինը Բեռնուլիի բազմանդամներով Ֆուրիեի շարքերի արագացման եղանակի անալոգն է: Երկրորդ եղանակը նախկինում առաջարկված [13] եղանակի նմանակն է: Աշխատանքում ներկայացված են մոտարկման սխալի ասիմպտոտական գնահատականներ, ինչպես նաև թվային փորձնական արդյունքներ:

Academician A. Nersessian, R. Barkhudaryan

Convergence Acceleration of Decomposition by Eigenfunctions of a Model Boundary Value Problem with a Discontinuous Coefficient

We consider the convergence acceleration problem of a decomposition by eigenfunctions of a simple model equation with non-smooth coefficient. Two acceleration methods are suggested. The first is analog of well-known acceleration that uses Bernoulli polynomials. The second one is analog of [13]. The comparison of these two methods are given. Numerical results and asymptotic errors of corresponding approximations are presented.