УДК 517.53

Академик В. С. Захарян, М. М. Мирзоян

# Предельные множества эквиморфных функций по произвольным касательным направлениям

(Представлено 6/V 2005)

Ключевые слова: *предельные множества, эквиморфные функции, эквиморфизм, P-последовательность*

В настоящей работе продолжено изучение граничных свойств эквиморфных в единичном круге функций [1] вдоль произвольных касательных путей (см. [2]); используются все содержащиеся там обозначения и определения.

**1.** Пусть $D : |z < 1$ - единичный круг, $\Gamma : |z| = 1$ - единичная окружность, $\Omega$ - сфера Римана. Х.Э. Мехия функцию $f : D \to \Omega$ называет эквиморфной функцией, если f есть композиция $f(z) = g(h(z))$ некоторой мероморфной функции $g(z)$ в круге D и эквиморфизма $h : D \to D$, т.е такого гомеоморфизма круга D на себя, что h, $h^{-1}$ равномерно непрерывны относительно гиперболической метрики единичного круга [1].

Пусть $\xi = e^{i\theta} \in \Gamma$. Для произвольных действительных чисел $\alpha$ и q, $0 < \alpha < \infty$, $q \ge 0$ назовем правым q-путем $L^+(\xi, q, \alpha)$ всякую кривую, которая задается непрерывной на [0;1) функцией $z = z(t)$ со свойствами:

$$\lim_{t\to 1} z(t) = \xi;\ |z(t) - \xi| < [1/2];\ \theta < \arg z(t) < \theta + [(\pi)/6],\ \arg z(t) \to \theta \text{ (монотонно), при } t \to 1 \text{ и}$$

$$\lim_{t\to 1} (1 - |z(t)|)|\arg z(t) - \theta|^{-q-1} = \alpha.$$

Назовем правым $q^*$-путем $L^+(\xi,q^*,\alpha)$ правый q-путь, задающийся уравнением

$$z = [1 - \alpha(\varphi - \theta)^{q+1}] \cdot e^{i\varphi}, \quad \varphi \in (\theta;\theta + \alpha^{-[1/(1+q)]}].$$

Обозначим через $L^-(\xi, q, \alpha)$ ($L^-(\xi, q^*, \alpha)$), $0 < \alpha < \infty$, $q \ge 0$ и назовем левым q-путем ($q^*$-путем) образ правого q-пути $L^+(\xi, q, \alpha)$ ($L^+(\xi, q^*, \alpha)$) при симметрии относительно радиуса $h(\xi,0)$ круга D в точке $\xi = e^{t\varphi} \in \Gamma$. Правые и левые q-пути ($q^*$-пути) назовем q-путями ($q^*$-путями) $L(\xi, q, \alpha)$ ($L(\xi, q^*, \alpha)$) или просто $L(\xi, q)$ ($L(\xi, q^*)$).

Для произвольных $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $q_1 \ge 0$, $q_2 \ge 0$, $0 < \delta < [1/2]$ назовем $(q_1,q_2)$-углом ($(q_1,q_2)^*$) в точке $\xi \in \Gamma$ и обозначим через $\Delta(\xi,q_1,q_2,\alpha,\beta,\delta)$ ($\Delta^*(\xi,q_1,q_2,\alpha,\beta,\delta)$) или просто $\Delta(\xi,q_1,q_2)$ ($\Delta^*$

$(\xi,q_1,q_2,))$, если нас не интересуют размеры этого угла, подобласть круга D, ограниченную двумя разными $L(\xi,q_1,\alpha)$ $(L(\xi,q_1^*,\alpha))$ и $L(\xi,q_2,\beta)$ $(L(\xi,q_2^*,\beta))$ путями (возможен случай $q_1 = q_2$) и окружностью $|z - \xi| = \delta$, где $\delta$ достаточно малое положительное число.

**2.** Для произвольной $f : D \to \Omega$, произвольной точки $\xi \in \Gamma$ и произвольного множества $S \subset D$, для которого $\xi$ является предельной точкой, предельное множество $C(f, \xi, S)$ определяется как пересечение

$$C(f, \xi, S) = \bigcap_{r>0} \overline{f(V_r(\xi)\cap S)}, \text{ где } V_r(\xi) = \{z \in D; |z - \xi| < r\},\ r > 0,$$

черта - замыкание множества.

Пусть A - произвольное конечное множество неотрицательных чисел. Для произвольной $f : D \to \Omega$ точку $\xi \in \Gamma$ отнесем к множеству $M_A(f)$, если для произвольного q-пути $L(\xi,q)$, $q \in A$, имеем $C(f,\xi,L(\xi,q)) = C(f,\xi,D) \neq \Omega$. Точку $\xi \in \Gamma$ отнесем к множеству $I_A(f)$, если для произвольного $(q_1,q_2)$-угла $\Delta(\xi,q_1,q_2)$, $q_1,q_2 \in A$ имеем $C(f,\xi,\Delta(\xi,q_1,q_2)) = \Omega$. Точку $\xi \in \Gamma$ отнесем к множеству $P_A(f)$, если каждый q-путь $L(\xi,q)$ содержит P-последовательность [3,4] функции f (z). Точку $\xi \in \Gamma$ отнесем к множеству $E_A(f)$, если для любого $(q_1,q_2)$-угла $\Delta(\xi,q_1,q_2)$, $q_1,q_2 \in A$, справедливо $C(f,\xi,\Delta(\xi,q_1,q_2)) = C(f,\xi,D)$. Точку $\xi \in \Gamma$ отнесем к множеству $I^*_A(f)$, если для любого q-пути $L(\xi,q)$, $q \in A$, имеем $C(f ,\xi, L(\xi, q)) = \Omega$ и каждый q-путь $L(\xi,q)$, $q \in A$ не содержит ни одной P-последовательности функции f(z). Ясно, что $I^*_A(f) \subset I_A(f)$.

Справедлива следующая теорема, которая является усилением теоремы 1 из [5].

**Теорема 1.** *Для произвольной эквиморфной в круге* D *функции* $f : D \to \Omega$ *и для произвольного конечного множества* A *неотрицательных чисел справедливо разложение*

$$\Gamma = M_A(f) \cup I^*_A(f) \cup P_A(f) \cup F,$$

*где* F - *множество первой категории на* $\Gamma$.

**Доказательство.** Пусть эквиморфная в D функция f(z) имеет каноническое представление $f = g(h(z))$ и пусть $Q_f(z) = (1 - |h(z)|^2) \cdot |g'(h(z))| \cdot (1 + |g(h(z))|^2)^{-1}$.

Применим теорему 3 из [2] к функциям f(z) и $Q_f(z)$. Получим следующие разложения:

$$\Gamma = E_A(f) \cup F_1, \quad \Gamma = E_A(Q_f) \cup F_2,$$

где $F_1$ и $F_2$ - множества первой категории на $\Gamma$. Следовательно, дополнение множества $R_A(f) = E_A(f) \cap E_A(Q_f)$ имеет первую категорию на $\Gamma$. Покажем, что справедливо вложение $R_A(f) \subset M_A$

$(f) \cup I^*_A(f) \cup P_A(f)$.

Действительно, в произвольной точке $\xi \in R_A(f)$ имеем следующие четыре возможности:

I. множество $C(Q_f, \xi, D)$ ограничено и $C(f, \xi, D) \neq \Omega$;

II. множество $C(Q_f, \xi, D)$ ограничено и $C(f, \xi, D) = \Omega$;

III. множество $C(Q_f, \xi, D)$ не ограничено и $C(f, \xi, D) = \Omega$;

IV. множество $C(Q_f, \xi, D)$ не ограничено и $C(f, \xi, D) \neq \Omega$.

Если $\xi \in R_A(f)$ и $C(Q_f, \xi, D)$ ограничено, то согласно теореме 2 из [2] для каждого q-пути $L(\xi, q)$, $q \in A$, в точке $\xi$ справедливо

$$C(f, \xi, L(\xi, q)) = C(f, \xi, D).$$

Поэтому в случае реализации возможности I, имеем $\xi \in M_A(f)$. Если реализуется возможность II, то согласно теоремам 1 и 2 из [2] имеем $\xi \in I^*_A(f)$. Если $\xi \in R_A(f)$ и $C(Q_f, \xi, D)$ не ограничено, то каждый q-путь $L(\xi, q)$, $q \in A$, содержит P-последовательность функции $f(z)$. Следовательно, возможность IV не может реализоваться, а при реализации возможности III имеем $\xi \in P_A(f)$.

Теорема 1 полностью доказана.

**Замечание.** В случае, когда $A = \{0\}$ и f - эквиморфная в D функция, теорема 1 доказана в работе [1], в случае, когда f - мероморфная в D функция, она усиливает теорему 1 из [7], в случае, когда $A = \{0;1\}$ и f - мероморфная в D функция, она усиливает теорему 1 из [8]. В топологических пространствах сходные теоремы доказаны в работах [9-11].

Из теоремы 4 из [2] и теоремы 1 следует

**Теорема 2.** *Для произвольной эквиморфной в круге* D *функции* $f : D \to \Omega$ *и для произвольного конечного множества* A *неотрицательных чисел справедливо разложение*

$$I_A(f) = I^*_A(f) \cup P_A(f) \cup F,$$

*где* F - *множество первой категории.*

**Замечание.** В случае, когда f - мероморфная в D функция, теорема 2 усиливает теорему 2 из [7], в случае, когда $A = \{0\}$ и f - мероморфная в D функция, она доказана в [12].

**4.** Справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.** *Для произвольной эквиморфной в круге* D *функции* $f : D \to \Omega$ *и для произвольного конечного множества* A *неотрицательных чисел множество* $P_A(f)$ *имеет тип* $G_\delta$ *на* $\Gamma$.

**Доказательство.** Обозначим через $B = \{\alpha_j, \beta_k\}$ последовательность всех положительных рациональных пар $(\alpha_j, \beta_k)$, $\alpha_j > 0$, $\beta_k > 0$ и будем считать $A = \{q_i\}$, $q_i \geq 0$. Пусть $(\alpha_j, \beta_k) \in B$, $q_i \in A$, $q_r \in A$ и n и m, n = 1,2,…, m = 2,3,…, произвольные фиксированные числа. Обозначим через $E_{n,m,j,k,i,r}$ - множество таких точек $\xi \in \Gamma$, для которых

$$\mathrm{Sup}\,[Q_f(z)] \leq n,$$

$$z \in \Delta^*(\xi, q_i, q_r, \alpha_j, \beta_k, \frac{1}{m}).$$

Покажем, что справедливо разложение:

$$\Gamma \backslash P_A(f) = \cup E_{n,m,j,k,i,r}. \qquad (1)$$

Поскольку вложение $\cup E_{n,m,j,k,i,r} \subset \Gamma \backslash P_A(f)$ очевидно, то для доказательства обратного вложения допустим, что $\xi$ произвольная точка множества $\Gamma \backslash P_A(f)$. Тогда согласно теореме 1 из [2] можно найти $(q_1,q_2)$-угол $\Delta(\xi,q_1,q_2)$, $q_1,q_2 \in A$, в котором $C(Q_f,\xi,\Delta(\xi,q_1,q_2))$ ограничено. Следовательно, можно найти такое натуральное число $n \in N$ и такой $(q_i, q_r)^*$-угол $\Delta^*(\xi, q_i, q_r, \alpha_j, \beta_k, [1/m]) \subset \Delta(\xi, q_i, q_r, \alpha_j, \beta_k, [1/m])$, $q_i, q_r \in A$, $(\alpha_j, \beta_k) \in B$, $m > 2$, $m \in N$, при которых в точке $\xi$ имеем

$$\mathrm{Sup}\,[Q_f(z)] \leq n,$$

$$z \in \Delta^*(\xi, q_i, q_r, \alpha_j, \beta_k, \frac{1}{m}),$$

т.е. $\xi \in E_{n,m,j,k,i,r}$. Чтобы доказать, что каждое множество $E_{n,m,j,k,i,r}$ из (1) замкнуто, допустим, что $\xi_0 \in \overline{E}_{n,m,j,k,i,r}$. Поскольку

$$\Delta^*(\xi_0, q_i, q_r, \alpha_j, \beta_k, \frac{1}{m}) \subset \bigcup_{\xi \in E_{n,m,j,k,i,r}} \Delta^*(\xi, q_i, q_r, \alpha_j, \beta_k, \frac{1}{m}),$$

то множества $E_{n,m,j,k,i,r}$ замкнуты и теорема 3 доказана.

**Замечание.** В случае, когда $A = \{0\}$ и f - эквиморфная в D функция, теорема 3 доказана в [1], в случае, когда f - мероморфная в D функция, она усиливает теорему 3 из [7], в случае $A = \{0\}$ и f - мероморфная в D функция, она доказана в [12].

**4.** Справедлива следующая

**Теорема 4.** *Для произвольной эквиморфной в* D *функции* $f : D \to \Omega$ *и для произвольного конечного множества* A *неотрицательных чисел множество* $M_A(f)$ *имеет структуру* $M_A(f) = G \backslash F$, *где* $G \subset \Gamma$ *открытое множество, а* F - *множество первой категории и типа* $F_\sigma$ *на* $\Gamma$.

**Доказательство.** Обозначим через K(f) множество таких точек $\xi \in \Gamma$, для которых $C(f, \xi, D) \neq \Omega$. По определению K(f) - открытое множество. Докажем справедливость равенства

$$M_A(f) = E_A(f) \cap K(f).$$

Действительно, вложение $M_A(f) \subset E_A(f) \cap K(f)$ следует из определений участвующих в нем множеств. Обратное вложение следует на основании теоремы 2 из [2]. Заменяя теперь множество $E_A(f)$ разностью $\Gamma \setminus F$ (см. теорему 3 из [2]), где F - множество первой категории и типа $F_\sigma$, получим утверждение теоремы 4.

**Замечание.** В случае, когда $A = \{0\}$ и f - эквиморфная в D функция, теорема 4 установлена в [1], в случае, когда f - мероморфная в D функция, она усиливает теорему 5 из [7], в случае, когда $A = \{0\}$ и f - мероморфная в D функция, она доказана в [12].

Государственный инженерный университет Армении

## Литература

1. *Мехия Х.Э.* - ДАН СССР. 1982. Т. 265. N1. С. 35-38.
2. *Мирзоян М.М.* - ДНАН Армении. 2005. Т. 105. N4. С. 328-332.
3. *Гаврилов В.И.* - Матем. сб. 1965. Т. 67 (109). N3. С. 408-427.
4. *Гаврилов В.И.* - Матем. сб. 1966. Т. 71 (113). N3. С. 386-404.
5. *Гаврилов В.И.* - ДАН СССР. 1974. Т. 216. N1. С. 21-23.
6. *Мирзоян М.М.* - ДАН АрмССР. 1978. Т. 66. N4. С. 200-204.
7. *Мирзоян М.М.* - ДАН АрмССР. 1978. Т. 66. N5. С. 263-266.
8. *Айрапетян А.Н., Гаврилов В.И.* - Изв. АН АрмССР. 1976. Математика. Т. 11. N5. С. 390-399.
9. *Эминян О.М.* - ДАН АрмССР. 1988. Т. 86. N1. С. 3-7.
10. *Симушев А.А.* - ДАН СССР. 1986. Т. 289. N2. С. 305-309.
11. *Абду Аль-Рахман Хасан.* - ДАН СССР. 1981. Т. 260. N4. С. 777-780.
12. *Гаврилов В.И.* - ДАН СССР. 1977. Т. 232. N6. С. 1237-1240.

Ակադեմիկոս Վ. Ս. Զաքարյան, Մ. Մ. Միրզոյան

## Էկվիմորֆ ֆունկցիաների սահմանային բազմությունները կամայական շոշափող ուղղություններով

Հոդվածում ուժեղացվում է էկվիմորֆ [1] ֆունկցիաների համար Մեյերի ընդհանրացված թեորեմը ([5], թեորեմ 1) միավոր շրջանագծի հետ կամայական շոշափման կարգ ունեցող ուղիների երկայնքով, ինչպես նաև տրվում են էկվիմորֆ ֆունկցիաների սահմանային բազմություններով ծնված $M_A(f), P_A(f)$ բազմությունների բնութագրերը:

**Academician V. S. Zakaryan, M. M. Mirzoyan**

## Cluster Sets of Equimorphic Functions along Arbitrary Tangential Directions

In this paper the Meier’s generalized theorem ([5], theorem 1) for equimorphic functions ([1]) is strengthened along lines of arbitrary tangential order with unit circle, as well as the characteristics of sets $M_A(f), P_A(f)$ derived from equimorphic cluster sets are given.