

УДК 539.3

В. М. Белубекян, М. В. Белубекян

Трехмерная задача распространения поверхностных волн Рэлея

(Представлено академиком С. А. Амбарцумяном 25/IV 2005)

Рассматриваются задачи распространения упругих поверхностных волн в изотропном полупространстве с двумя вариантами условий на границе полупространства. Исследование задач упрощается введением потенциальных функций по аналогу с задачами плоской деформации. В случае, когда на границе полупространства заданы условия равенства нулю всех трех напряжений, получается известное обобщение задачи Рэлея для плоской деформации. Если же на границе заданы условия равенства нулю нормального напряжения, одного из касательных напряжений и одного из касательных перемещений, получается новое дисперсионное уравнение. В этом случае поверхностная волна в отличие от волн Рэлея обладает свойством дисперсии. Установлены также условия, при которых поверхностная волна не существует.

1. В прямоугольной декартовой системе координат (x, y, z) полупространство занимает область: $-\infty < x < \infty$, $0 \leq y < \infty$, $-\infty < z < \infty$. Для уравнения распространения упругих волн в изотропной среде (уравнение Ламе)

$$c_t^2 \Delta \bar{u} + (c_l^2 - c_t^2) \text{grad div } \bar{u} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

вводится преобразование

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1.2)$$

Здесь обозначения общеизвестные: c_l , c_t - скорости распространения продольной и поперечной волн соответственно, $\bar{u} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$ - вектор перемещения. Преобразование (1.2) такое же, что и для задачи плоской деформации в плоскости (x, y) [1]. Необходимо отметить, что преобразование (1.2) было применено также для трехмерной задачи статики пьезоактивной среды [2].

Подстановка (1.2) в проекции уравнения (1.1) на оси Ox и Oz дает

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[c_l^2 \Delta_2 \varphi + c_t^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + (c_l^2 - c_t^2) \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(c_t^2 \Delta \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) = 0,$$

(1.3)

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[c_1^2 \Delta_2 \varphi + c_t^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + (c_1^2 - c_t^2) \frac{\partial v}{\partial y} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left(c_t^2 \Delta \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) = 0.$$

Здесь Δ_2 - двумерный оператор Лапласа

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (1.4)$$

Уравнения (1.3), как и в случае задачи плоской деформации, будут удовлетворены, если имеют место следующие уравнения:

$$c_1^2 \Delta_2 \varphi + c_t^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + (c_1^2 - c_t^2) \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1.5)$$

$$c_t^2 \Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \quad (1.6)$$

Из (1.5) перемещение v определяется следующим образом:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{1 - \theta} \left(\Delta_2 \varphi + \theta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right), \quad \theta = \frac{c_t^2}{c_1^2}. \quad (1.7)$$

Проекция уравнения (1.1) на ось Oy после дифференцирования по y , приводится к следующему виду:

$$c_t^2 \Delta \frac{\partial v}{\partial y} + (c_1^2 - c_t^2) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Delta_2 \varphi + (c_1^2 - c_t^2) \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (1.8)$$

Выражение (1.7) подставляется в (1.8) и после некоторых преобразований получается

$$\Delta^2 \varphi - \left(\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_t^2} \right) \frac{\partial^2 \Delta \varphi}{\partial t^2} + \frac{1}{c_1^2 c_t^2} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} = 0 \quad (1.9)$$

или

$$\left(\Delta - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\Delta \varphi - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) = 0. \quad (1.10)$$

Общее решение уравнений (1.6) и (1.10) представляется в виде

$$\varphi = \Phi(y)\exp i(\omega t - k_1 x - k_3 z), \quad \psi = \Psi(y)\exp i(\omega t - k_1 x - k_3 z). \quad (1.11)$$

Подстановка (1.11) в (1.10) приводит к решению обыкновенных дифференциальных уравнений относительно искомых функций Φ , Ψ . Решение указанных уравнений, удовлетворяющее условиям затухания

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \bar{u} = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \Phi = 0, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \Psi = 0, \quad (1.12)$$

имеет вид

$$\Phi = Ae^{-v_1 ky} + Bc^{-v_2 ky}, \quad \Psi = Ce^{-v_2 ky}. \quad (1.13)$$

Здесь

$$v_1 = \sqrt{1 - \theta\eta}, \quad v_2 = \sqrt{1 - \eta}, \quad k = \sqrt{k_1^2 + k_3^2}, \quad \eta = k^{-2} c_t^{-2} \omega^2 \quad (1.14)$$

и должно выполняться условие затухания

$$0 < \eta < 1. \quad (1.15)$$

При помощи (1.11) и (1.13) перемещения u , w определяются из (1.2), а перемещение v - из (1.7) с учетом условия затухания (1.12):

$$\begin{aligned} u &= -i[Ak_1 e^{-v_1 ky} + (Bk_1 + Ck_3)e^{-v_2 ky}]\exp i(\omega t - k_1 x - k_3 z), \\ w &= -i[Ak_3 e^{-v_1 ky} + (Bk_3 - Ck_1)e^{-v_2 ky}]\exp i(\omega t - k_1 x - k_3 z), \\ v &= -k(Av_1 e^{-v_1 ky} + Bv_2^{-1} e^{-v_2 ky})\exp i(\omega t - k_1 x - k_3 z). \end{aligned} \quad (1.16)$$

2. Пусть плоскость, ограничивающая полупространство, свободна от нагрузок

$$\sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{yx} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0. \quad (2.1)$$

В частном случае, когда перемещения u , v не зависят от координаты z и $w \equiv 0$, из решения (1.16), удовлетворяя условиям (2.1), получим дисперсионное уравнение, определяющее скорость поверхностной волны Рэлея. Решение трехмерной задачи, обобщающее задачу Рэлея, получено в [3] с использованием функций Ламе пространственной задачи. Результаты статьи [3] приводятся также в монографии [4]. Другой вариант пространственной задачи с

граничными условиями (2.1) исследован в [5]. В монографии [6] дан обширный обзор по пространственным задачам распространения упругих волн.

Граничные условия свободного края (2.1) с учетом закона Гука и преобразования (1.2) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} + (1 - 2\theta)\Delta_2 \varphi &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Подстановка (1.16) в (2.2) приводит к следующей системе однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A, B, C:

$$\begin{aligned} (2 - \eta)A + 2B &= 0, \\ k_1[2v_1v_2A + (2 - \eta)B] + k_3v_2^2C &= 0, \\ k_3[2v_1v_2A + (2 - \eta)B] - k_1v_2^2C &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

При k_3 (или $k_1 = 0$ - задачи плоской деформации) система уравнений (2.3) приводится к уравнениям задачи Рэлея, а равенство нулю детерминанта - к уравнению Рэлея

$$R(\eta_0) \equiv (2 - \eta_0)^2 - 4 \sqrt{1 - \eta_0} \sqrt{1 - \theta\eta_0} = 0, \quad \eta_0 = k_1^{-2} c_t^{-2} \omega^2; \quad (2.4)$$

при этом

$$B = -(1 - 0.5\eta_0)A, \quad C = 0. \quad (2.5)$$

Для пространственной задачи ($k_1 \neq 0$, $k_3 \neq 0$) равенство нулю детерминанта системы (2.3) дает

$$v_2^2 R(\eta) = 0. \quad (2.6)$$

При $R(\eta) = 0$ получается уравнение пространственной задачи Рэлея, которое приводится в [3].

Компоненты вектора перемещения определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
u &= -ik_1[e^{-v_1ky} - (1 - 0.5\eta)e^{-v_2ky}]A\exp i(\omega t - k_1x - k_3z), \\
v &= -k[v_1e^{-v_1ky} - v_2^{-1}(1 - 0.5\eta)e^{-v_2ky}]A\exp i(\omega t - k_1x - k_3z), \\
w &= -ik_3[e^{-v_1ky} - (1 - 0.5\eta)e^{-v_2ky}]A\exp i(\omega t - k_1x - k_3z).
\end{aligned}
\tag{2.7}$$

При $v_2^2 = 0$ ($R(\eta) \neq 0$) следует, что $\eta = 1$ и $B = A = 0$. Отсюда с учетом (1.16)

$$u = -ik_1C \exp i(\omega t - k_1x - k_3z), \quad v = 0, \quad w = ik_3C \exp i(\omega t - k_1x - k_3z). \tag{2.8}$$

Т.е. получается объемная волна (предельная волна), не зависящая от координаты по глубине полупространства.

3. Принимается, что на плоскости, ограничивающей полупространство, заданы следующие граничные условия:

$$\sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{yx} = 0, \quad w = 0 \quad \text{при} \quad y = 0. \tag{3.1}$$

Здесь в отличие от условий свободной границы (2.1) ставится ограничение на перемещение вдоль оси Oz . С учетом закона Гука и преобразования (1.2) граничные условия (3.1) приводятся к виду

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_2}{\partial y} + (1 - 2\theta) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) &= 0, \\
\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} &= 0, \\
\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} &= 0.
\end{aligned}
\tag{3.2}$$

Подстановка (1.16) в граничные условия (3.2) приводит к следующей системе однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A , B , C :

$$\begin{aligned}
[\theta(2 - \eta) + \xi(1 - \theta\eta)]A + (2\theta + \xi)B - (1 - 2\theta)\xi C &= 0, \\
[\theta(2 - \eta) + \xi(1 - \theta\eta) - (1 - 2\theta)\xi^2]A + [2\theta + \xi - (1 - 2\theta)\xi^2]B &= 0, \\
(2v_1v_2 + \xi^2v_2^2)A + (2 - \eta + \xi^2v_2^2)B &= 0.
\end{aligned}
\tag{3.3}$$

Система уравнений относительно произвольных постоянных отделяется, и равенство нулю детерминанта этой системы после некоторых преобразований имеет вид

$$\begin{aligned} R(\eta, \xi) \equiv & (2 - \eta)^2 - 4v_1 v_2 + \theta^{-1}[(2 - \eta)v_1 - 2v_2]v_1 \xi - \\ & - \theta^{-1}[(1 - 2\theta)(2 - \eta - 2v_1 v_2) + \theta v_2^2 \eta] \xi^2 - v_2^2 \eta \xi^3 = 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$\xi = k_1^{-1} k_3. \quad (3.5)$$

В частном случае $\xi = 0$ ($k_3 = 0$) уравнение (3.4) совпадает с классическим уравнением Рэлея. Нетрудно проверить, что корню уравнения (3.4) $\eta = 0$ соответствует тривиальное решение. Исключением корня $\eta = 0$ [7] уравнение (3.5) приводится к виду

$$\begin{aligned} R_1(\eta, \xi) \equiv & \eta - \frac{4(1 - \theta)v_2}{v_1 + v_2} + \theta^{-1} \left[\frac{2(1 - \theta)}{v_1 + v_2} - v_1 \right] v_1 \xi - \\ & - \theta^{-1} \left\{ (1 - 2\theta) \left[2 \frac{1 + \theta(1 - \eta)}{1 + v_1 v_2} - 1 \right] + \theta v_2^2 \right\} \xi^2 - v_2^2 \eta \xi^3 = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Функция $R_1(\eta, \xi)$ на концах промежутка (1.15) принимает значения

$$R_1(0, \xi) = -(1 + \xi^2)[2(1 - \theta) + \xi] < 0, \quad (3.7)$$

$$R_1(1, \xi) = 1 + \theta^{-1}(1 - \theta)\xi - \theta^{-1}(1 - 2\theta)\xi^2. \quad (3.8)$$

Для классической задачи Рэлея ($\xi = 0$) отсюда следует, что $R_1(0, 0) < 0$, $R_1(1, 0) > 0$ и следовательно дисперсионное уравнение имеет действительный корень, удовлетворяющий условию затухания (1.15). Из (3.8) следует, что для рассматриваемой задачи поверхностная волна существует, если

$$R_1(1, \xi) > 0. \quad (3.9)$$

Таким образом, при граничных условиях (3.1) поверхностная волна существует, если согласно (3.9) и (3.8)

$$\xi < \xi_* = (1 - 2\theta)^{-1} [1 - \theta + \sqrt{(1 - \theta)^2 + 4\theta(1 - 2\theta)}]. \quad (3.10)$$

При этом в отличие от поверхностной волны Рэлея эта волна обладает свойством дисперсии

(зависит от ξ).

В табл. 1 приводятся значения ξ для различных значений коэффициента Пуассона ν .

Таблица 1

ν	0.5	0.4	0.3	0.25	0.2	0.1	0
θ	0	1/6	2/7	1/3	3/8	4/9	0.5
ξ_*	1	1.4253	2.0000	2.4142	3.0000	5.7015	∞

В частном случае $\nu = 0$ поверхностная волна существует для любых длин волн по направлению оси Oz (для любых волновых чисел k_z).

В табл. 2 приводятся значения безразмерного параметра η , определяющего фазовую скорость поверхностной волны, в зависимости от ξ для коэффициента Пуассона $\nu = 0.25$ ($\theta = 1/3$).

Таблица 2

ξ	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	2.0	2.2
η	0.8451	0.8181	0.8147	0.8271	0.8487	0.8742	0.9810	0.9933

При $\xi = 0$ ($k_z = 0$) получается известное значение фазовой скорости волны Рэлея. С возрастанием ξ безразмерный параметр фазовой скорости сначала уменьшается (усиливается локализованность волны), затем возрастает и стремится к единице ($\eta \rightarrow 1$) при $\xi \rightarrow \xi_* \approx 2.4142$.

Институт механики НАН РА

Ереванский государственный университет

Литература

1. *Новацкий В.* Теория упругости. М. Мир. 1975. 872 с.
2. *Wangs Z., Heng Bailin.* - Int. J. Solids Structures. 1995. V. 32. N 1. P. 105-115.
3. *Knowles J. K.* - J. of Geophysical Research. 1966. V. 21. N 22. P. 5480-5481.
4. *Achenbach J. D.* Wave Propagation in Elastic Solids. Amsterdam. North. Holl. Publ. Co. 1984. 425 p.
5. *Белубекян В. М.* - Изд. НАН Армении. Механика. 1995. Т. 48. N 1. С. 9-15.
6. *Абрамян Б. Л.* Пространственные задачи теории упругости. Ереван. Изд. НАН Армении. 1998. 275 с.
7. *Белубекян М. В.* в сб. Проблемы механики деформируемого твердого тела. Ереван. Изд. НАН Армении. 1997. С. 79-96.

Վ. Մ. Բելուբեկյան, Մ. Վ. Բելուբեկյան

Ռելեյի ալիքների տարածման եռաչափ խնդիր

Դիտարկվում են իզոտրոպ կիսատարածության մեջ առաձգական մակերևութային ալիքների տարածման խնդիրներ՝ կիսատարածության եզրին եզրային պայմանների երկու տարբերակի դեպքում: Խնդիրների հետազոտությունը պարզեցվում է պոտենցիալ ֆունկցիաների ներմուծմամբ, հարթ դեֆորմացիայի խնդիրների նմանությամբ: Այն դեպքում, երբ եզրի վրա տրված է բոլոր երեք լարումների՝ զրոյի հավասար լինելու պայմանը, ստացվում է Ռելեյի հարթ դեֆորմացիայի խնդրի հայտնի ընդհանրացումը: Եթե եզրի վրա տրված է, որ զրոյական են նորմալ լարումը, շոշափող լարումներից մեկը և նրան ուղղահայաց շոշափող տեղափոխությունը, ապա ստացվում է նոր դիսպերսիոն հավասարում: Այդ դեպքում մակերևութային ալիքը, ի տարբերություն Ռելեյի ալիքի, ունի դիսպերսիայի հատկություն: Գտնվել են նաև այն պայմանները, որոնց դեպքում մակերևութային ալիքը գոյություն ունի:

V. M. Belubekyan, M. V. Belubekyan

Three-dimensional Problem of Reyleight Wave Propagation

Problems of propagation of elastic surface waves in an isotropic semi-space are considered, with two variants of boundary conditions at the surface of semi-space. Investigation is simplified by introducing potential functions, analogous to plane-strain problems. In the case, when on the surface all three components of stresses are given to be zero, the known generalization of Reyleight plane strain problem is obtained. But in the case when on the surface it is given that normal stresses, one of the shear stresses and one of the shear displacements are equal to zero, then a new dispersion equation is obtained. In this case the surface wave, in contrary to the Reyleight waves, is dispersive. Conditions of existence of the surface wave are obtained.