

УДК 539.3:534.1

Д. И. Бардзокас, М. Л. Фильштинский

Возбуждение сдвиговых волн в пьезокерамическом полупространстве с двумя туннельными отверстиями системой поверхностных электродов

(Представлено академиком Л. А. Агаловяном 27/V 2005)

Рассматривается антиплоская смешанная динамическая задача электроупругости для пьезокерамического полупространства, ослабленного двумя туннельными отверстиями. Возбуждение сопряженных полей осуществляется за счет разностей электрических потенциалов, подаваемых на систему электродов, расположенных на поверхностях полостей. Граничная задача сводится к системе сингулярных интегродифференциальных уравнений с разрывными ядрами, которая реализуется численно по схеме метода квадратур. Приводятся результаты параметрических исследований, характеризующие поведение компонентов электроупругого поля на границе и в области кусочно-однородного полупространства.

Взаимодействие двух частично электродированных туннельных отверстий в неограниченной пьезокерамической среде в условиях антиплоской деформации на основе подхода [1] исследовано в [2]. В данной статье строится аналитический алгоритм для исследования электроупругих полей в пьезокерамическом полупространстве с двумя отверстиями, возбуждаемых системой электродов.

Рассмотрим отнесенное к декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ пьезокерамическое полупространство, ослабленное двумя туннельными вдоль оси симметрии материала x_3 отверстиями C_1 и C_2 . На свободных от механических напряжений поверхностях отверстий C_1 и C_2 располагаются соответственно $2n_1$ и $2n_2$ бесконечно длинных в направлении оси x_3 электродов с заданными разностями электрического потенциала, причем неэлектродированные участки сопряжены с вакуумом (воздухом). Границы k -го электрода, расположенного на контуре C_m , определены величинами $\alpha_{2k-1}^{(m)}$ и $\alpha_{2k}^{(m)}$ ($k = \overline{1, 2n_1}$, если $m = 1$; $k = \overline{1, 2n_2}$, если $m = 2$), а электрический потенциал на нем задан величиной $\phi_k^{(m)} = \operatorname{Re}(\Phi_k^{(m)} e^{-i\omega t})$. Предположим, что поперечные сечения отверстий обладают симметрией относительно оси x_2 и их центры лежат на этой оси (рис. 1). Расположение парных электродов не может быть вполне произвольным; оно должно быть согласовано с отраженными от границ сопряженными волновыми полями, т.е. быть также симметричным относительно оси x_2 .

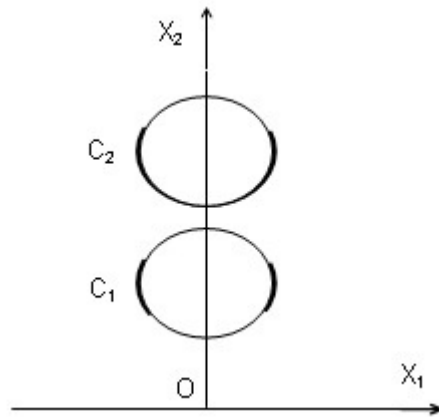


Рис.1. Схема полупространства с двумя отверстиями.

В данных условиях в кусочно-однородной среде реализуется состояние антиплоской деформации [3]. В квазистатическом приближении система уравнений граничной задачи электроупругости сводится к двум дифференциальным уравнениям относительно перемещения $u_3 = \text{Re}(U_3 e^{-i\omega t})$ и электрического потенциала $\phi = \text{Re}(\Phi e^{-i\omega t})$ [1]:

$$\begin{aligned} c_{44}^E \nabla^2 u_3 + e_{15} \nabla^3 \phi &= \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}; \\ e_{15} \Delta^2 u_3 - \varepsilon_{11}^S \nabla^2 \phi &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь c_{44}^E , ε_{11}^S , e_{15} и ρ - соответственно модуль сдвига, измеренный при постоянном электрическом поле, диэлектрическая проницаемость, измеренная при постоянной деформации, пьезоэлектрическая постоянная и массовая плотность материала, t - время.

Из (1) вытекают соотношения

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_3 - c^{-2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} &= 0, \quad \nabla^2 F = 0; \\ \phi &= \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}^S} u_3 + F, \quad c = \sqrt{\frac{c_{44}^E (1 + k_{15}^2)}{\rho}}, \quad k_{15} = \frac{e_{15}}{\sqrt{c_{44}^E \varepsilon_{11}^S}}, \end{aligned} \quad (2)$$

где c - скорость волны сдвига в пьезосреде, k_{15} - коэффициент электромеханической связи [4].

При этом компоненты электроупругого поля выражаются через функции u_3 и F по формулам

$$\tau_{13} - i\tau_{23} = 2 \frac{\partial}{\partial z} [c_{44}^E (1 + k_{15}^2) u_3 + e_{15} F];$$

$$D_1 - iD_2 = -2\varepsilon_{11}^S \frac{\partial F}{\partial z}; \quad (3)$$

$$E_1 - iE_2 = -2 \frac{\partial}{\partial z} (F + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}^S} u_3), \quad z = x_1 + ix_2.$$

В (3) τ_{ij} - напряжения продольного сдвига, D_j и E_j - соответственно компоненты векторов индукции и напряженности электрического поля.

Механическое и электрические граничные условия на поверхностях полостей при учете (2), (3) запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial n} \{c_{44}^E (1 + k_{15}^2) u_3 + e_{15} F\} = 0 \quad \text{на } C = C_1 \cup C_2;$$

$$\phi = F + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}^S} u_3 = \phi^*(\zeta, t), \quad \zeta \in C_\phi; \quad (4)$$

$$D_n = -\varepsilon_{11}^S \frac{\partial F}{\partial n} = 0 \quad \text{на } C \setminus C_\phi.$$

Здесь C_ϕ - часть объединенного контура C , соответствующая электродированной поверхности отверстий; дифференциальный оператор $\partial/\partial n$ обозначает производную по нормали к контуру C .

Равенства (2), записанные относительно амплитудных значений функций u_3 и F , принимают вид

$$\nabla^2 U_3 + \gamma^2 U_3 = 0, \quad \nabla^2 F^* = 0;$$

$$\Phi = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}^S} U_3 + F^*, \quad \gamma = \frac{\omega}{c}, \quad (5)$$

где γ - волновое число.

Будем предполагать, что на границе полупространства $x_2 = 0$ имеют место два типа краевых условий:

а) полупространство жестко закреплено и покрыто вдоль границы заземленным электродом

$$u_3 = 0, \quad \phi = 0; \quad (6)$$

б) полупространство свободно от сил и граничит с вакуумом

$$\sigma_{23} = 0, \quad D_2 = 0. \quad (7)$$

Таким образом, поставленная задача сводится к определению функций U_3 и F^* из дифференциальных уравнений (5), граничных условий (4), (6) или (7).

Следуя [5], представим искомые функции в виде

$$\begin{aligned} \epsilon_{44}^E U_3(z) &= \int_{C_1} p_1(\zeta) \{H_0^{(1)}(\gamma r) - A H_0^{(1)}(\gamma r_1)\} ds + \int_{C_2} p_2(\zeta^*) \{H_0^{(1)}(\gamma r^*) - A H_0^{(1)}(\gamma r_1^*)\} ds; \\ F^*(z) &= \int_{C_1} f_1(\zeta) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} (\ln r - A \ln r_1) ds + \int_{C_2} f_2(\zeta^*) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} (\ln r^* - A \ln r_1^*) ds; \end{aligned} \quad (8)$$

$$r = |\zeta - z|, \quad r^* = |\zeta^* - z|, \quad r_1 = |\bar{\zeta} - z|, \quad r_1^* = |\bar{\zeta}^* - z| \quad \zeta \in C_1, \quad \zeta^* \in C_2,$$

где $H_v^{(1)}(x)$ - функция Ханкеля первого рода порядка v .

Интегральные представления (8) удовлетворяют уравнениям (5) и условиям излучения на бесконечности. Подставляя предельные значения функций (8) при $z \rightarrow \zeta_0 \in C_1$ и $z \rightarrow \zeta_0^* \in C_2$ в граничные условия (4), приходим к системе сингулярных интегродифференциальных уравнений второго рода:

$$\begin{aligned} 2ip_1(\zeta_0) + \int_{C_1} \{p_1(\zeta)g_1(\zeta, \zeta_0) + f_1'(\zeta)g_2(\zeta, \zeta_0)\} ds + \\ + \int_{C_2} \{p_2(\zeta^*)g_1(\zeta^*, \zeta_0) + f_2'(\zeta^*)g_2(\zeta^*, \zeta_0)\} ds = 0, \quad \zeta_0 \in C_1; \end{aligned}$$

$$2ip_2(\zeta_0^*) + \int_{C_1} \{p_1(\zeta)g_1(\zeta, \zeta_0^*) + f'_1(\zeta)g_2(\zeta, \zeta_0^*)\}ds + \quad (9)$$

$$+ \int_{C_2} \{p_2(\zeta^*)g_1(\zeta^*, \zeta_0^*) + f'_2(\zeta^*)g_2(\zeta^*, \zeta_0^*)\}ds = 0, \quad \zeta_0^* \in C_2;$$

$$-\pi f_1(\zeta_0) + \int_{C_1} \{p_1(\zeta)g_3(\zeta, \zeta_0) + f_1(\zeta)g_4(\zeta, \zeta_0)\}ds +$$

$$+ \int_{C_2} \{p_2(\zeta^*)g_3(\zeta^*, \zeta_0) + f_2(\zeta^*)g_4(\zeta^*, \zeta_0)\}ds = \Phi_1^*(\zeta_0), \quad \zeta_0 \in C_{1\Phi};$$

$$-\pi f_2(\zeta_0^*) + \int_{C_1} \{p_1(\zeta)g_3(\zeta, \zeta_0^*) + f_1(\zeta)g_4(\zeta, \zeta_0^*)\}ds +$$

$$+ \int_{C_2} \{p_2(\zeta^*)g_3(\zeta^*, \zeta_0^*) + f_2(\zeta^*)g_4(\zeta^*, \zeta_0^*)\}ds = \Phi_2^*(\zeta_0^*), \quad \zeta_0^* \in C_{2\Phi};$$

$$\int_{C_1} f'_1(\zeta)g_5(\zeta, \zeta_0)ds + \int_{C_2} f'_2(\zeta^*)g_5(\zeta^*, \zeta_0)ds = 0, \quad \zeta_0 \in C_1 \setminus C_{1\Phi};$$

$$\int_{C_1} f'_1(\zeta)g_5(\zeta, \zeta_0^*)ds + \int_{C_2} f'_2(\zeta^*)g_5(\zeta^*, \zeta_0^*)ds = 0, \quad \zeta_0 \in C_2 \setminus C_{2\Phi};$$

$$g_1(\xi, \eta) = \frac{2}{\pi i} \operatorname{Re} \frac{e^{i\psi_0}}{\xi - \eta} + \gamma[H_1(\gamma r_0)\cos(\psi_0 - \alpha_0) - AH_1^{(1)}(\gamma r_{10})\cos(\psi_0 - \alpha_{10})];$$

$$g_2(\xi, \eta) = \frac{e_{15}}{1+k_{15}^2} g_5(\xi, \eta), \quad g_3(\xi, \eta) = \frac{k_{15}^2}{e_{15}} [H_0^{(1)}(\gamma r_0) - A H_0^{(1)}(\gamma r_{10})];$$

$$g_5(\xi, \eta) \operatorname{Im} \left[\frac{e^{i\psi_0}}{\xi - \eta} + \frac{A e^{i\psi_0}}{\bar{\xi} - \eta} \right], \quad H_1(x) = \frac{2i}{\pi x} + H_1^{(1)}(x);$$

$$g_4(\xi, \eta) = \operatorname{Re} \left[\frac{e^{i\psi}}{\xi - \eta} - \frac{A e^{i\psi}}{\xi - \bar{\eta}} \right], \quad r_0 = |\xi - \eta|, \quad r_{10} = |\bar{\xi} - \eta|, \quad f'_m(\zeta) = \frac{df_m}{ds};$$

$$\alpha_0 = \arg(\xi - \eta), \quad \alpha_{10} = \arg(\bar{\xi} - \eta), \quad \psi_0 = \psi(\eta), \quad \psi = \psi(\xi).$$

Здесь ψ - угол между нормалью к контуру C и осью x_1 , $\Phi_m^*(\eta)$ - кусочно-постоянные функции, задающие значения электрического потенциала на электродах. Определив функции $p_m(\zeta)$ и $f_m(\zeta)$ из системы (9), по формулам (3) с использованием представлений (8) можно определить все полевые величины в полупространстве с двумя отверстиями.

Найдем выражение для амплитуды плотности распределения электрических зарядов $q_k^{(m)}(\beta^{(m)})$ на k -м электроде, расположенном на контуре C_m ($m = 1, 2$). Вводя параметризацию контуров с помощью равенств $\zeta = \zeta(\beta^{(1)})$, $\zeta^* = \zeta^*(\beta^{(2)})$ ($0 \leq \beta^{(m)} \leq 2\pi$) и учитывая то, что отверстия сопряжены с вакуумом, запишем

$$q_k^{(m)}(\beta^{(m)}) = D_n^{(m,k)}(\beta^{(m)}), \quad \alpha_{2k-1}^{(m)} < \beta^{(m)} < \alpha_{2k}^{(m)} \quad (m = 1, 2). \quad (10)$$

Здесь $D_n^{(m,k)}(\beta^{(m)})$ представляет собой амплитуду нормальной компоненты вектора электрической индукции на соответствующем электродированном участке контура C_m .

Используя представление (8) для функции $F^*(x_1, x_2)$, с учетом (4) и (10) находим

$$q_k^{(m)}(\beta_0^{(m)}) - \varepsilon_{11}^S = \left\{ \int_{C_1} f_1'(\zeta) \operatorname{Im} \left[\frac{e^{i\psi_0}}{\zeta - \eta} + \frac{A e^{i\psi_0}}{\bar{\zeta} - \eta} \right] ds + \int_{C_2} f_2'(\zeta^*) \operatorname{Im} \left[\frac{e^{i\psi_0}}{\zeta^* - \eta} + \frac{A e^{i\psi_0}}{\bar{\zeta}^* - \eta} \right] ds \right\}, \quad (11)$$

где $\eta(\beta_0^{(m)}) \in C_{m\phi_k}$, $C_{m\phi_k}$ - часть контура C_m , на которой расположен k -й электрод.

Интегрируя выражение (11) в пределах от $\alpha_{2k-1}^{(m)}$ до $\alpha_{2k}^{(m)}$, получим амплитудное значение

суммарного заряда $Q_k^{(m)}$ k -го электрода на контуре C_m , отнесенное к единице его длины. Ток, протекающий через данный электрод, можно определить по формуле

$$I_k^{(m)}(t) = \operatorname{Re} \left\{ i\omega e^{-i\omega t} \int_{\alpha_{2k-1}^{(m)}}^{\alpha_{2k}^{(m)}} q_k^{(m)}(\beta_0^{(m)}) s'(\beta_0^{(m)}) d(\beta_0^{(m)}) \right\}, \quad s'(\beta_0^{(m)}) = \frac{ds}{d\beta_0^{(m)}}. \quad (12)$$

В качестве примера рассмотрим полупространство (керамика PZT-4 [6]) с двумя круговыми отверстиями, описываемыми уравнениями

$$\zeta = \operatorname{Re} i\beta^{(1)} + a, \quad \zeta^* = \operatorname{Re} i\beta^{(2)} + b, \quad \beta^{(m)} \in [0, 2\pi]. \quad (13)$$

Возбуждение электроупругих полей осуществляется четырьмя электродами, попарно расположенными на поверхности каждой полости ($\alpha_1^{(m)} = -\pi/7$, $\alpha_2^{(m)} = \pi/7$, $\alpha_3^{(m)} = 6\pi/7$, $\alpha_4^{(m)} = 8\pi/7$, $m = 1, 2$). В расчетах полагали $a/R = 3$, $b/R = 7$.

Решение системы интегродифференциальных уравнений (9) с учетом (13) проводилось численно по специальной схеме метода квадратур [1].

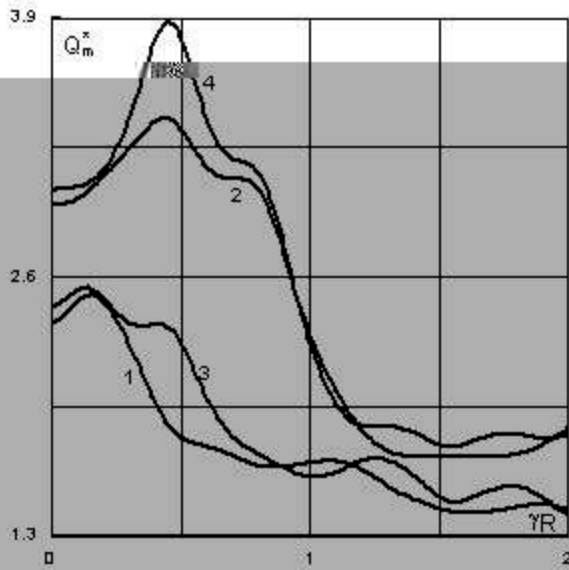


Рис. 2. Изменение относительных суммарных электрических зарядов Q_m^* ($m = 1, 2$) на электродах в функции нормализованного волнового числа в случае свободного полупространства ($A = -1$).

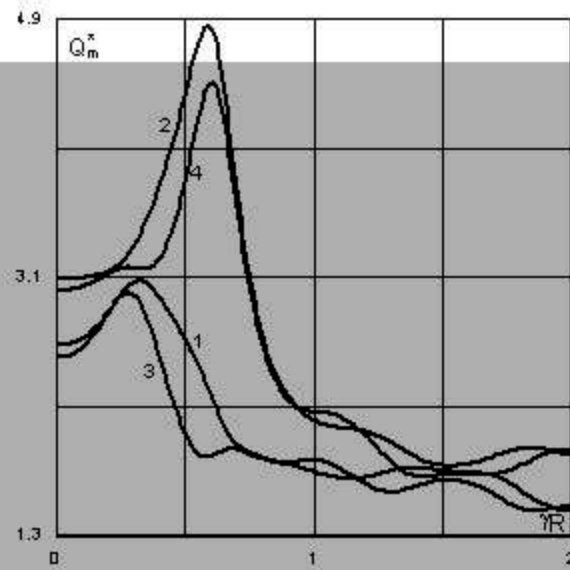


Рис. 3. Изменение относительных суммарных электрических зарядов Q_m^* ($m = 1, 2$) на электродах в функции нормализованного волнового числа в случае закрепленного полупространства ($A = 1$).

На рис. 2 показано изменение величин $Q_m^* = |Q_1^{(m)}| / (\epsilon_{11}^S \Phi^*)$ ($m = 1, 2$) в функции нормализованного волнового числа γR в случае свободного полупространства ($A = -1$). Кривые 1, 3 и 2, 4 построены для случаев нагружения $\Phi_1^{(1)} = \Phi_1^{(2)} = \Phi^*$, $\Phi_2^{(1)} = \Phi_2^{(2)} = -\Phi^*$ и $\Phi_1^{(1)} = -\Phi_1^{(2)} = \Phi^*$, $\Phi_2^{(1)} = -\Phi_2^{(2)} = -\Phi^*$ соответственно. Линии 1 и 2 относятся к величине Q_1^* , линии 3 и 4 - к величине Q_2^* . Аналогичные результаты в случае закрепленного полупространства ($A = 1$)

для тех же значений параметров и в том же соответствии показаны на рис. 3.

Из анализа результатов следует, что влияние динамического эффекта на поведение компонентов электроупругого поля в полупространстве с отверстиями проявляется более существенно, чем в пространстве [2]. Как видно из рис. 3 (кривая 2), вследствие динамического эффекта величина Q_1^* может превысить свой статический аналог на 57% .

Расчет показывает, что распределение перемещения и напряжений в области кусочно-однородного полупространства в значительной мере зависит от частоты гармонического нагружения и значений задаваемых на системе электродов электрических потенциалов.

Рассмотренный подход к исследованию электроупругого поля в полупространстве с отверстиями может быть применен для расчета характеристик перфорированных пьезоэлектрических преобразователей различной геометрии при электрическом нагружении с помощью многоэлектродных систем.

Работа выполнена в рамках договора о научном сотрудничестве между Институтом механики НАН РА и Афинским национальным техническим университетом.

Афинский национальный технический университет, Греция

Сумский государственный университет, Украина

Литература

1. Бардзокас Д. И., Фильштинский М. Л. Электроупругость кусочно-однородных тел. Сумы. Университетская книга. 2000. 308 с.
2. Бардзокас Д., Фильштинский М. Л. - Мех. композитных материалов. 2002. Т. 38. № 2. С. 261-268.
3. Партон В. З., Кудрявцев Б. А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М. Наука. 1988. 471 с.
4. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Электроупругость. (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5-ти т.: Т.5) Киев. Наукова. думка. 1989. 280 с.
5. Бардзокас Д., Фильштинский М. Л. - Мех. композитных материалов. 2002. Т. 38. № 4. С. 487-496.
6. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Физическая акустика. Т. 1. Методы и приборы ультразвуковых исследований. Часть А. М. Мир. 1966. С. 204-326.

Դ. Ի. Բարձոկաս, Մ. Լ. Ֆիլշտինսկի

**Մակերևութային էլեկտրոդների համակարգի միջոցով երկու թունելային անցքերով
այլեզուկերամիկ կիսատարածության մեջ սահքային ալիքների գրգռումը**

Դիտարկվում է երկու թունելային անցքերով թուլացված այլեզուկերամիկ կիսատարածության համար էլեկտրաառաձգականության խառը դինամիկական հակահարթ խնդիրը: Համակցված դաշտերի գրգռումը իրականացվում է անցքերի մակերևույթների վրա տեղակայված էլեկտրոդների համակարգով տրվող էլեկտրական պոտենցիալների տարբերությունների հաշվին:

Եզրային խնդիրը բերվում է խզվող կորիզներով սինգուլյար ինտեգրալիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի, որի թվային լուծումը կառուցվում է քառակուսացումների մեթոդով: Բերվում են պարամետրական հետազոտությունների արդյունքները, որոնք բնութագրում են էլեկտրաառաձգական դաշտի բաղադրիչների վարքը եզրագծի վրա և կտոր առ կտոր համասեռ կիսատարածությունում:

D. I. Bardzokas, M. L. Filshtinsky

**Excitation of Shear Waves in a Piezoceramic Half-space with Two Tunnel Holes by
System of Surface Electrodes**

An antiplane mixed dynamic problem of electroelasticity for a piezoceramic half-space weakened by two tunnel holes is considered. Excitation of electroelastic fields occurs due to the effect of the given electrodes electric potential differences.

The boundary problem is reduced to a system of singular integro-differential equations with discontinuous kernels which is realized by the quadrature method. Results of parametric investigations characterizing the behavior of the components of electroelastic field on the boundary and in the area of a piecewise-homogeneous half-space are given.