

УДК 539.1

Член корреспондент НАН РА А. Г. Багдоев, А. Н. Мартirosян,
С. М. Погосян

Решение смешанной динамической граничной задачи для упругого полупространства

(Представлено 30/III 2005)

Рассматривается задача о движении изотропного упругого полупространства $z \geq 0$, на границе которого вдоль полуплоскости $x \geq 0$ заданы горизонтальные перемещения, а вдоль $x < 0$ граница свободна от напряжений. Решение получено методом интегральных преобразований Лапласа по времени t и преобразований Фурье по координатам x, y и приводится к системе Винера - Хопфа, которая решается методами сингулярных интегральных уравнений и циркулянтов. Вычисляются коэффициенты интенсивности касательных напряжений около края полуплоскости $z = 0, x = 0, |y| < \infty$. Метод циркулянтов при решении системы уравнений Винера - Хопфа предложен в [1].

Аналогичная данной статическая задача методом Винера - Хопфа решена в [2]. Приведение задачи Гильберта к системе Фредгольма дано в книге [3]. В настоящей работе дается численное решение вышеуказанной системы Фредгольма и вычисление интегралов для коэффициентов интенсивности касательных напряжений.

1. *Сведение задачи к системе Винера - Хопфа.* Выберем оси координат x, y в плоскости поверхности, ось z по нормали к указанной плоскости; ось y направлена вдоль прямой раздела граничных условий. Пусть $U_j, j = 1, 2, 3$, есть компоненты перемещений вдоль осей x, y, z . Уравнения движения упругой среды имеют вид

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad (a^2 - b^2) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial U_k}{\partial x_k} + b^2 \Delta U_j = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad (1.1)$$

где a, b - скорости упругих волн, Δ - оператор Лапласа.

Граничные условия берутся в форме ($z = 0, |y| < \infty$)

$$\sigma_{zz} = 0, \quad -\infty < x < \infty; \quad \sigma_{xz} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0, \quad -\infty < x < 0, \quad (1.2)$$

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= U_1^0 = -PH(\eta_0 - |y|)H(\xi_0 - x)H(t) \\ U_2 &= U_2^0 = -QH(\eta_0 - |y|)H(\xi_0 - x)H(t) \end{aligned} \right\} \quad 0 < x < \infty \quad (1.3)$$

где P, Q, η_0, ξ_0 - постоянные, $H(x)$ - единичная функция.

Обозначив через $\bar{U}_j$ преобразования Лапласа по t от U_j , через $\bar{\bar{U}}_j$ - преобразования Фурье по x, y от $\bar{U}_j|_{z=0}$ можно записать

$$\bar{U}_j = \sum_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\bar{U}}_j^{(n)}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \exp(\bar{\alpha}ix + \bar{\beta}iy + \bar{\gamma}_n iz) d\bar{\alpha} d\bar{\beta}. \quad (1.4)$$

Подставляя (1.4) в (1.1), получим

$$\bar{\gamma}_n = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_n^2} - \bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2}, \quad s = -i\omega, \quad c_1 = a, \quad c_2 = b,$$

где s - параметр преобразования Лапласа.

Кроме того из (1.1) имеет место

$$\bar{\bar{U}}_2^{(1)} = \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}} \bar{\bar{U}}_1^{(1)}, \quad \bar{\bar{U}}_3^{(2)} = \frac{\bar{\gamma}_2^2 - \bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2}{2\omega\bar{\gamma}_2} \bar{\bar{U}}_1^{(1)}, \quad \bar{\bar{U}}_3^{(1)} = \frac{\bar{\gamma}_1}{\bar{\alpha}} \bar{\bar{U}}_1^{(1)}. \quad (1.5)$$

Подставив (1.4) в граничные условия (1.2), (1.3) и обращая преобразования Фурье по x, y , получим

$$\bar{\gamma}_1 = \omega\bar{\gamma}_1 \quad i\bar{U}_1^{(1)} \frac{4\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2 - (\bar{\gamma}_2^2 - \bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2)}{2\bar{\gamma}_2} + \bar{U}_1^{(2)} i\bar{\gamma}_2 = \frac{\tau_{xz}^-}{b^2}, \quad (1.6)$$

$$\frac{i\bar{\beta}}{\bar{\alpha}} \frac{4\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2 - (\bar{\gamma}_2^2 - \bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2)}{2\bar{\gamma}_2} \bar{U}_1^{(1)} + \bar{U}_1^{(2)} i\bar{\gamma}_2 = \frac{\tau_{xz}^-}{b^2}, \quad (1.7)$$

$$\bar{\bar{U}}_1^{(1)} + \bar{\bar{U}}_1^{(2)} = P \mu_0 + U_1^+, \quad \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}} \bar{\bar{U}}_1^{(1)} + \bar{\bar{U}}_1^{(2)} = Q \mu_0 + U_2^+,$$

$$\mu_0 = -\frac{(e^{-i\bar{\beta}\eta_0} - e^{-i\bar{\beta}\xi_0})(1 - e^{-i\bar{\alpha}\xi_0})}{4\pi^2 s \bar{\alpha} \bar{\beta}} \cdot \frac{\bar{\gamma}_2^2 - \bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2}{2\bar{\alpha}} \bar{\bar{U}}_1^{(1)} - \frac{\bar{\bar{U}}_1^{(2)}}{\bar{\alpha}} - \bar{\beta} \bar{\bar{U}}_2^{(2)} = 0,$$

$$U_{1,2}^+ = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^0 dx \int_0^{\infty} (U_{1,2}^{(1)} + U_{1,2}^{(2)}) e^{-st - i\bar{\alpha}x - i\bar{\beta}y} dt,$$

$$\frac{\tau_{xz,yz}^-}{\rho} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \frac{\sigma_{xz,yz}}{\rho} e^{-st-i\alpha x-i\beta y} dt,$$

где индекс (+) дает функции, аналитические в верхней полуплоскости $\bar{\alpha}$, а индекс (-) дает аналитические функции в нижней полуплоскости $\bar{\alpha}$.

Исключая из (1.6) функции $\bar{U}_{1,2}^{(1,2)}$, можно получить систему Винера - Хопфа

$$A\Phi^+ + B\Phi^- + C = 0, \quad (1.8)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 f & a_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \bar{\gamma}_1 & 0 \\ 0 & \bar{\gamma}_1 \end{pmatrix}, \quad \Phi^+ = \begin{pmatrix} U_1^+ \bar{\gamma}_1^+ \\ U_2^+ \bar{\gamma}_1^+ \end{pmatrix}, \quad \Phi^- = \begin{pmatrix} \frac{\tau_{yz}^-}{\bar{\gamma}_1^-} \\ \frac{\tau_{xz}^-}{\bar{\gamma}_1^-} \end{pmatrix} \frac{i}{b^2},$$

$$C = A \begin{pmatrix} P \bar{\gamma}_1^+ \\ Q \bar{\gamma}_1^+ \end{pmatrix} \varphi_0, \quad (1.9)$$

$$a_0 = \frac{(4\bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2 - 3\bar{\gamma}_2^2 + \bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2) \bar{\alpha} \bar{\beta}}{\bar{\gamma}_2 \omega^2 b^{-2}}, \quad \bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_1^+ \bar{\gamma}_1^-,$$

$$a_1 = \frac{4\bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2 \bar{\beta}^2 + (\bar{\gamma}_2^{-2} - \bar{\beta}_2^2)^2 + \bar{\alpha}^{-2} (\bar{\gamma}_2^{-2} + \bar{\beta}^2)}{\bar{\gamma}_2 \omega^2 b^{-2}},$$

$$a_1 f = \frac{4\bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2 \bar{\alpha}^2 + (\bar{\gamma}_2^{-2} - \bar{\alpha}_2^2)^2 + \bar{\beta}^{-2} (\bar{\alpha}^{-2} + \bar{\gamma}_2^{-2})}{\bar{\gamma}_2 \omega^2 b^{-2}}. \quad (1.10)$$

Система уравнений (1.8) имеет обычный вид [1], здесь введен циркулянт A, что позволяет для настоящей задачи найти асимптотику решения для $\bar{\alpha} \rightarrow \infty$ в замкнутом виде.

2. *Решение задачи Гильберта для произвольного $\bar{\alpha}$.* Уравнение (1.8) может быть записано в виде задачи Гильберта

$$\Phi^+(\bar{\alpha}) = G(\bar{\alpha})\Phi^-(\bar{\alpha}) + g(\bar{\alpha}), \quad (2.1)$$

где

$$G(\bar{\alpha}) = -A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{-a_0\gamma_1}{\Delta} & \frac{a_1\gamma_1}{\Delta} \\ \frac{a_1f\gamma_1}{\Delta} & -\frac{a_0\gamma_1}{\Delta} \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} -P\gamma_1^+ \\ -Q\gamma_1^+ \end{pmatrix},$$

$\Delta = a_0^2 - a_1^2 f$, $R(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ - функция Рэлея.

Решение задачи (2.1), ограниченное на бесконечности, дано в [3] в виде

$$\Phi(\bar{\alpha}) = \frac{X(\bar{\alpha})}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(X^+(\zeta))^{-1} g(\zeta) d\zeta}{\zeta - \bar{\alpha}}, \quad (2.2)$$

где матрицы функции $x(\bar{\alpha})$ удовлетворяют однородным уравнениям

$$X^+(\bar{\alpha}) = G(\bar{\alpha})X^-(\bar{\alpha}), \quad G(\bar{\alpha}) = X^+(\bar{\alpha})\{X^-(\bar{\alpha})\}^{-1}. \quad (2.3)$$

Как показано в [3], уравнение для $x(\bar{\alpha})$ в (2.3) можно привести к системе интегральных уравнений Фредгольма

$$X^-(\bar{\alpha}) - \frac{1}{23\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G^{-1}(\bar{\alpha})G(\zeta) - E}{\zeta - \bar{\alpha}} X^-(\zeta) d\zeta = \gamma(\bar{\alpha}), \quad (2.4)$$

где $\gamma(\bar{\alpha})$ есть асимптотическое поведение $X^-(\bar{\alpha})$ для $\bar{\alpha} \approx \infty$. Здесь интеграл берется в смысле главного значения Коши, $X^-(\bar{\alpha})$ после факторизации $G(\bar{\alpha})$ дается следующей асимптотической формулой:

$$X^-(\alpha) = \begin{pmatrix} b_0 & 0 \\ 0 & b_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{ch} \sqrt{f_0} \tau_1^- & \frac{1}{\sqrt{f_0}} \text{sh} \sqrt{f_0} \tau_1^- \\ \sqrt{f_0} \text{sh} \sqrt{f_0} \tau_1^- & \text{ch} \sqrt{f_0} \tau_1^- \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

где

$$b_0 = \frac{4\sqrt{-f_0} \sqrt{\sqrt{\eta_R^2 - \bar{\beta}^2} - \bar{\alpha} \exp(D^-)}}{\gamma_1^-(\bar{\alpha})}, \quad X^+(\alpha) = (X^-(\alpha))^{-1},$$

$$\tau_1^-(\bar{\alpha}) = \frac{\pi i}{4\sqrt{f_0}} + \frac{1}{2\pi} \text{Rei} \int_{\frac{\omega}{c_1}}^{\frac{\omega}{c_2}} \frac{1}{\sqrt{f(\xi)}} \ln \frac{-b^2 R(\bar{\xi}, \bar{\beta})}{\omega^2 (\lambda_1^{\text{aq}})^2} \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi} - \bar{\alpha}}, \quad \lambda_1^{\text{a}} = a_0 - \sqrt{a_0^2 + \frac{Rb^2}{\omega^2}},$$

$$D^{\pm}(\bar{\alpha}) = \frac{1}{4\pi i} \int_{\frac{\pm i\omega}{c_1}}^{\frac{\pm i\omega}{c_2}} \ln \frac{R(\bar{\eta})}{R(\bar{\eta})} \frac{\bar{\eta} d\bar{\eta}}{\left(\sqrt{\bar{\eta}^2 - \bar{\beta}^2} - \bar{\alpha} \right) \sqrt{\bar{\eta}^2 - \bar{\beta}^2}}, \quad f_0 = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} f(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = 2 \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right),$$

$\eta_R = [(\omega)/(c_R)]$ есть корень уравнения Рэлея для плоской задачи. Здесь все факторизуемые функции удовлетворяют условиями теоремы В из [5].

Из (2.2) с учетом (1.9), (2.5), вводя обозначения

$$X^+(\bar{\alpha}) = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}^{-1}, \quad X^-(\bar{\alpha}) = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

для больших $\bar{\alpha}$, соответствующих малым x , можно получить

$$\frac{i}{b^2} \begin{pmatrix} \frac{\tau_{yz}^-}{\bar{\gamma}_1^-} \\ \frac{\tau_{xz}^-}{\bar{\gamma}_1^-} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi i \bar{\gamma}_1^-} \sqrt[4]{-f_0} \sqrt{\sqrt{\bar{\eta}_R^2 - \bar{\beta}^2} - \bar{\alpha} \exp(D^-)} \begin{pmatrix} \text{ch} \sqrt{f_0} \tau_1^- & \frac{1}{\sqrt{f_0}} \text{sh} \sqrt{f_0} \tau_1^- \\ \sqrt{f_0} \text{sh} \sqrt{f_0} \tau_1^- & \text{ch} \sqrt{f_0} \tau_1^- \end{pmatrix} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \frac{g(\zeta) d\zeta}{\zeta - \bar{\alpha}}, \quad (2.7)$$

где X_{jk} даются (2.3), (2.5) заменой $\bar{\alpha}$ на ζ .

Соотношения (2.7) для касательных напряжений вблизи края $z = 0$, $x \approx 0$, $x > 0$, после обратных интегральных преобразований, дают асимптотику, где в коэффициенте перед интегралом в (2.7) взято $\bar{\alpha} \approx \infty$, в форме

$$\frac{\sigma_{yz}}{b^2 \rho} = \frac{1}{16\pi^3} \sqrt[4]{f_0} \begin{pmatrix} 1+i \\ 2\pi i \end{pmatrix} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \sqrt{\alpha} \frac{e^{-i\omega\beta\eta_0} - e^{i\omega\beta\eta_0}}{\sqrt{c_1} \zeta_0 \beta} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} M'_1(1 - e^{i\omega\zeta_0\zeta_0}) e^{s(t-\alpha x - \beta y)} \frac{d\zeta_0}{\zeta_0 - \alpha}, \quad (2.8)$$

где $\bar{\alpha} = \omega\alpha$, $\bar{\beta} = \omega\beta$, $\beta = [1/(c_1)]\lambda$, $\zeta = \zeta_0\omega$, $\zeta_0 = [1/(c_1)]\chi$,

$$\begin{pmatrix} M_1' \\ N_1' \end{pmatrix} = \sqrt{\sqrt{1-\lambda^2} + \chi} \begin{pmatrix} X_{11}P + \frac{i}{\sqrt{f_0}} X_{21}P + QX_{12} + \frac{i}{\sqrt{f_0}} X_{22}Q \\ X_{21}P + i\sqrt{f_0} X_{11}P + QX_{22} + Qi\sqrt{f_0} X_{12} \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Обозначая $f_{1,2} = t - \alpha x - \beta y \pm \beta \eta_0$, $f_{3,4} = t - \alpha x - \beta y \pm \beta \eta_0 + \zeta_0 \xi_0$, вычисляя интеграл в (2.8) по s и после этого интеграл от дельта-функции по α $\delta(f_{1,2}) \delta(f_{3,4})$, можно получить решение в форме Смирнова - Соболева.

Пусть $\alpha_0^{1,2}$ и $\alpha_0^{3,4}$ есть корни уравнений $f_{1,2} = 0$, $f_{3,4} = 0$,

$$\alpha_0^{1,2} = \frac{t - \beta(y \mp \eta_0)}{x}, \quad \alpha_0^{3,4} = \frac{t - \beta(y \mp \eta_0) + \zeta_0 \xi_0}{x}. \quad (2.10)$$

Для $x \approx 0$ из (2.8), (2.10) можно получить

$$|\alpha_0^{1,2}| \approx \infty, \quad |\alpha_0^{3,4}| \approx \infty, \\ \frac{\sigma_{yz}}{\rho} = -\frac{b^2 4\sqrt{f_0}}{18\pi^3 \sqrt{c_1}} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+i)M_1'}{\zeta_0 \beta x} \left(\frac{\sqrt{\alpha_0^1}}{\zeta_0 - \alpha_0^1} - \frac{\sqrt{\alpha_0^2}}{\zeta_0 - \alpha_0^2} - \frac{\sqrt{\alpha_0^3}}{\zeta_0 - \alpha_0^3} + \frac{\sqrt{\alpha_0^4}}{\zeta_0 - \alpha_0^4} \right) d\zeta_0 d\beta \quad (2.11)$$

и такое же выражение для $[(\sigma_{yz})/(\rho)]$ заменой M_1' на N_1' .

Поскольку для больших α $X^-(\alpha) = \gamma(\alpha)$ и из (2.5)

$$\gamma(\alpha) = \sqrt[4]{-f_0} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{i}{\sqrt{f_0}} \\ i\sqrt{f_0} & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

из (2.4), (2.6) можно получить систему интегральных уравнений Фредгольма

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega}{c_1} \eta, \quad \bar{\zeta} = \frac{\omega}{c_1} \chi, \quad \bar{\beta} = \frac{\omega}{c_1} \lambda, \quad \bar{\gamma}_{1,2} = \frac{\omega}{c_1} \gamma_{1,2}, \\ a_0 = \frac{\omega c_2^2}{c_1^3} \bar{a}_0(\eta), \quad a_1 = \frac{\omega c_2^2}{c_1^3} \bar{a}_1(\eta), \quad y_{jk} = \frac{1+i}{2} \bar{y}_{jk}; \quad j, k = 1, 2; \\ \bar{y}_{11}(\eta) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-5}^5 \frac{c_{11} \bar{y}_{11}(\chi) + c_{12} \bar{y}_{21}(\chi) - \bar{y}_{11}(\chi)}{\chi - \eta} d\chi = 4\sqrt{f_0}, \\ \bar{y}_{12}(\eta) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-5}^5 \frac{c_{11} \bar{y}_{12}(\chi) + c_{12} \bar{y}_{22}(\chi) - \bar{y}_{12}(\chi)}{\chi - \eta} d\chi = \frac{i}{4\sqrt{f_0}}, \\ \bar{y}_{21}(\eta) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-5}^5 \frac{c_{21} \bar{y}_{11}(\chi) + c_{22} \bar{y}_{21}(\chi) - \bar{y}_{21}(\chi)}{\chi - \eta} d\chi = i f_0^{3/4}, \quad (2.13)$$

$$\bar{y}_{22}(\eta) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-5}^5 \frac{c_{21}\bar{y}_{12}(\chi) + c_{22}\bar{y}_{22}(\chi) - \bar{y}_{22}(\chi)}{\chi - \eta} d\chi = 4\sqrt{f_0}, \quad (2.14)$$

где вместо $(-\infty, \infty)$ взят для вычислений интервал интегрирования $(-5, 5)$, что возможно для приближенных расчетов сходящихся интегралов.

В силу (2.4), (2.1) в (2.14)

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}(\chi)c_{11} &= (\bar{a}_0(\eta)\bar{a}_0(\chi) - \bar{a}_1(\eta)f(\chi)\bar{a}_1(\chi)) \frac{\gamma_1(\chi)}{\gamma_1(\eta)}, \\ \bar{\Delta}(\chi)c_{12} &= (-\bar{a}_0(\eta)\bar{a}_1(\chi) + \bar{a}_1(\eta)f(\chi)\bar{a}_0(\chi)) \frac{\gamma_1(\chi)}{\gamma_1(\eta)}, \\ \bar{\Delta}(\chi)c_{21} &= (-\bar{a}_0(\eta)f(\chi)\bar{a}_1(\chi) + f(\eta)\bar{a}_1(\eta)\bar{a}_0(\chi)) \frac{\gamma_1(\chi)}{\gamma_1(\eta)}, \\ \bar{\Delta}(\chi)c_{22} &= (\bar{a}_0(\eta)f(\chi)\bar{a}_0(\chi) - f(\eta)\bar{a}_1(\eta)\bar{a}_1(\chi)) \frac{\gamma_1(\chi)}{\gamma_1(\eta)}, \\ \bar{\Delta}(\chi) &= \bar{a}_0^2(\eta) - \bar{a}_1^2(\chi) - \bar{a}_1^2(\chi)f(\eta), \end{aligned}$$

$\bar{a}_0(\eta)$, $\bar{a}_1(\eta)$, $f(\eta)$ даны в (1.10), (2.13).

3. Численный расчет коэффициентов интенсивности напряжений. При расчете решений системы (2.14) интегралы заменяются суммами и решение ищется в точках $\lambda, \eta = 0, 1, 2, 3, 4, 5, -1, -2, -3, -4, -5$.

После определения $\bar{y}_{jk}$ из (2.3), (2.6) можно получить

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} = -\frac{1}{1+i} \frac{c_2^2}{c_1^2} \begin{pmatrix} \bar{X}_{11} & \bar{X}_{12} \\ \bar{X}_{21} & \bar{X}_{22} \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{X}_{11} & \bar{X}_{12} \\ \bar{X}_{21} & \bar{X}_{22} \end{pmatrix} = \frac{2}{\gamma_1} \begin{pmatrix} \bar{y}_{11} & \bar{y}_{12} \\ \bar{y}_{21} & \bar{y}_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \bar{a}_0 & \bar{a}_1 \\ \bar{a}_1 f & \bar{a}_0 \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

функции в (3.2) зависят от аргументов χ, λ , $\bar{y}_{jk} = \bar{y}_{jk}(\chi)$ По формулам (2.9), (2.11) с учетом (2.13), обозначая

$$\begin{aligned} M_1' &= -\bar{M}_1 \frac{c_2^2}{c_1^2(1+i)}, \quad N_1' = -\bar{N}_1 \frac{c_2^2}{c_1^2(1+i)}, \\ \bar{M}_1 &= \left\{ P \left(\bar{X}_{11} + \frac{i}{\sqrt{f_0}} \bar{X}_{21} \right) + Q \left(\bar{X}_{12} + \frac{i}{\sqrt{f_0}} \bar{X}_{22} \right) \right\} \sqrt{\sqrt{1-\lambda^2} + \chi}, \\ \bar{N}_1 &= \left\{ P(\bar{X}_{21} + i\sqrt{f_0} \bar{X}_{11}) + Q(\bar{X}_{22} + i\sqrt{f_0} \bar{X}_{12}) \right\} \sqrt{\sqrt{1-\lambda^2} + \chi}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

получим напряжения вблизи оси y для $x > 0$ в виде ($Q = 0$)

$$\frac{\sigma_{yz}}{\rho c_2^2} \sqrt{x} \frac{8\pi^3 c_1^3}{c_2^2 \sqrt{c_1} \sqrt{f_0} P} = I_1 - I_2 - I_3 + I_4, \quad \frac{\sigma_{xz}}{\rho c_2^2} \sqrt{x} \frac{8\pi^3 c_1^3}{c_2^2 \sqrt{c_1} \sqrt{f_0} P} = I_5 - I_6 - I_7 + I_8, \quad (3.4)$$

где

$$I_{1,2} : I_{5,6} = -\operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{P} \frac{\overline{M}_1 : \overline{N}_1 d\lambda d\chi}{\lambda \chi \sqrt{t - \frac{\lambda}{c_1} (y \mp \eta_0)}},$$

$$I_{3,4} : I_{7,8} = -\operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{P} \frac{\overline{M}_1 : \overline{N}_1 d\lambda d\chi}{\lambda \chi \sqrt{t - \frac{\lambda}{c_1} (y \mp \eta_0) + \frac{\chi \xi_0}{c_1}}}. \quad (3.5)$$

Интегралы в (3.5) взяты в смысле главной части Коши. В (3.4), (3.5) считается, что $t = 0,1;1;3$ $[(\xi_0)/(c_1 t)] = 1$, $[(\eta_0)/(c_1 t)] = 1$, $y = 0$. Значения ξ_0, η_0 различны для трех величин t .

Результаты расчетов $I_1 - I_2 - I_3 + I_4$, $I_5 - I_6 - I_7 + I_8$ приведены в таблице.

t	0.1	1	3
$I_1 - I_2 - I_3 + I_4$	-0.02×10^5	-0.0066×10^5	-0.038×10^5
$I_5 - I_6 - I_7 + I_8$	0.076×10^5	0.024×10^5	0.013×10^5

Так как в левых частях (3.4) коэффициент при $[(\sigma_{yz} \sqrt{x})/(\rho P c_2^2)]$ и $[(\sigma_{xz} \sqrt{x})/(\rho P c_2^2)]$ имеет порядок 10^5 , для $[(\sigma_{yz} \sqrt{x})/(\rho P c_2^2)]$ и $[(\sigma_{xz} \sqrt{x})/(\rho P c_2^2)]$ получится соответственно -0.02 , -0.0066 , -0.0038 и 0.076 , 0.024 , 0.013 .

Горисский филиал Государственного инженерного университета Армении
Институт механики НАН РА

Литература

1. Саркисян В. С. Караханян И. М. В сб: Проблемы механики тонких деформируемых тел. К 80-летию академика НАН РА С. А. Амбарцумяна. Ереван. 2002. С. 266-280.
2. Петросян С. З. Об одном классе смешанных задач для неоднородного по степенному закону упругого полупространства. Канд. дис. Ин-т механики НАН РА. Ереван. 2002.
3. Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений. М. 1970. 379 с.
4. Мартirosян А. Н. Краевые задачи нестационарного движения анизотропных и изотропных упругих сред. Докт. дис. Ин-т механики НАН РА. Ереван 1990. 272 с.
5. Нобл Б. Метод Винера - Хопфа. М. ИЛ. 1962. 278 с.

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անգամ Ա. Գ. Բագդոև, Ա. Ն. Մարտիրոսյան, Ս. Մ. Պողոսյան

Խառը դինամիկ եզրային խնդրի լուծումը առաձգական կիսատարածության համար

Դիտարկվում է իզոտրոպ առաձգական կիսատարածության $x \geq 0$ շարժումը, որի հարթ եզրի վրա $x \geq 0$ կիսահարթությունում տրվում են հորիզոնական տեղափոխությունները, իսկ $x \leq 0$ կիսահարթությունում լարումները զերո են: Լուծումը ստացվում է ինտեգրալ ձևափոխությունների մեթոդով, և բերվում է Վիններ-Հոպֆի համակարգի, որը լուծվում է ցիրկուլյանտների մեթոդով: Նշված համակարգը լուծվում է Ֆրեդհոլմի ինտեգրալ հավասարումների բերման մեթոդով:

Corresponding Member of NAS RA A. G. Bagdov, A. N. Martirosyan, S. M. Pogosyan

Sotion of Mixed Dynamic Boundary Problem for Elastic Halfspace.

The problem of motion of isotrop elastic halfspace on plane boundary of which along halfplane $x \geq 0$ are given horizontal displacements, and on $x \leq 0$ halfplane shear stress are equal to zero. Solution is obtained by integral transforms method and is brought to Wiener-Hopf system, which is solved by circulants method and by solution of Fredholm integral system.