

УДК 517

А. А. Саргсян

О квазигриди базисности системы Фабера - Шаудера

(Представлено чл.-кор. НАН РА Г. Г. Геворкяном 25/V 2005)

Пусть $\Psi = \{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ормированный базис в банаховом пространстве X . Тогда для каждого элемента $f \in X$ существует единственный ряд по системе $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$, сходящийся к f по норме пространства X :

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(f) \psi_n.$$

Пусть элемент $f \in X$ задан. Перестановку натуральных чисел $\sigma = \{\sigma(n)\}_{n=1}^{\infty}$ назовем убывающей, если

$$|A_{\sigma(n)}(f)| \geq |A_{\sigma(n+1)}(f)|, \quad n = 1, 2, \dots$$

Множество таких перестановок обозначим через $D(f, \Psi)$. В случае строгих неравенств $D(f, \Psi)$ содержит только одну убывающую перестановку. Определим m гриди аппроксимант элемента f по базису Ψ , отвечающий перестановке $\sigma \in D(f, \Psi)$ следующим образом:

$$G_m(f) = G_m(f, \Psi, \sigma) = \sum_{n=1}^m A_{\sigma(n)}(f) \psi_{\sigma(n)}.$$

Этот нелинейный метод аппроксимации известен как гриди алгоритм (см. например [1]). Гриди алгоритмы для банаховых пространств, относительно нормированных базисов изучены Конягиным, Темляковым [1], ДеВором [2], Войташиком [3], Григоряном [4,5] и др. (см. [6,7]).

Определение 1. Говорят, что гриди алгоритм элемента $f \in X$ по системе Ψ сходится, если существует $\sigma \in D(f, \Psi)$, для которой

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|G_m(f, \Psi, \sigma) - f\|_X = 0. \quad (1)$$

Если базис Ψ является безусловным, то ясно, что последовательность операторов $\{G_m(f)\}_{m=1}^{\infty}$ сходится к $f \in X$ независимо от выбора $\sigma \in D(f, \Psi)$.

Определение 2. Система $\Psi = \{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется квазигриди в X , или квазигриди базисом в $\overline{\text{span}}(\Psi)$, если для каждого элемента $f \in \overline{\text{span}}(\Psi)$ и для любой перестановки $\sigma \in D(f, \Psi)$ выполняется (1).

В работе [2] доказана следующая

Теорема [Войтащик]. Для того, чтобы базис Ψ был квазигриди базисом в X , необходимо и достаточно, чтобы для каждого элемента $f \in X$, для всякой перестановки $\sigma \in D(f, \Psi)$ и для любого натурального числа m выполнялось неравенство

$$\|G_m(f, \Psi, \sigma)\|_X \leq B_0 \cdot \|f\|_X,$$

где постоянная B_0 не зависит от f и от m .

Напомним определение системы Фабера - Шаудера. Это система функций $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, $x \in [0,1]$, в которой

$$\varphi_0(x) = 1; \varphi_1(x) = x; \quad x \in [0,1]$$

и при $n = 2^k + i$; $k = 0, 1, \dots$; $i = 1, 2, \dots, 2^k$

$$\varphi_n(x) = \varphi_{2^k+i}(x) = \varphi_k^{(i)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right), \\ 1, & \text{если } x = \frac{2i-1}{2^{k+1}}, \\ \text{линейна} & \text{и непрерывна на } \left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{2i-1}{2^{k+1}}\right], \left[\frac{2i-1}{2^{k+1}}, \frac{i}{2^k}\right]. \end{cases} \quad (2)$$

k называется рангом функции $\varphi_k^{(i)}(x)$. Носитель функции $\varphi_n(x)$, $n = 2, 3, \dots$ системы (3) обозначим через Δ_n , а точку, где $\varphi_n(x) = 1$, $n = 2, 3, \dots$, через x_n .

В работе [7] доказано, что в пространстве $C_{[0,1]}$ не существует квазигриди базиса. Следовательно, в случае системы Фабера - Шаудера (система Фабера - Шаудера базис в пространстве $C_{[0,1]}$, см. [8]) для любого положительного числа B существуют функция $f_0 \in C_{[0,1]}$, перестановка $\sigma_0 \in D(f, \Phi)$ и натуральное число m_0 , для которых $\|G_{m_0}(f_0, \Phi, \sigma_0)\|_C > B \cdot \|f_0\|_C$.

Отметим, что доказательство этого результата не имеет конструктивного характера.

В настоящей работе приведено конструктивное доказательство этого результата со следующим усилением:

Теорема 1. Для любого x_0 ,

$$x_0 \in E_0 = \left\{ \frac{3i-2}{3 \cdot 2^k}, \frac{3i-1}{3 \cdot 2^k} ; k = 0, 1, \dots ; i = 1, 2, \dots, 2^k \right\}$$

существует функция $f_0 \in C_{[0,1]}$, такая что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} G_m(f_0, \Phi, \sigma, x_0) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m A_{\sigma(n)}(f_0) \varphi_{\sigma(n)}(x_0) = +\infty,$$

каково бы ни было $\sigma \in D(f_0, \Phi)$.

Пусть $S = \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ возрастающая последовательность натуральных чисел, а $\Lambda(n)$ - число элементов S меньше n . Положим

$$\rho(S) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sup \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{\Lambda(n+m) - \Lambda(n)}{m}.$$

$\rho(S)$ называется плотностью множества S .

Пусть $\Phi_{S'} = \{\varphi_{n'_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ такая подсистема системы (3), что носители функций $\varphi_{n'_k}(x)$, $k = 1, 2, \dots$, попарно не пересекаются (например $\Phi_{S'} = \{\varphi_{2^{k+2}}(x)\}_{k=1}^{\infty}$). Очевидно, что $\Phi_{S'}$ является безусловным, следовательно и квазигриди базисом в замыкании своей линейной оболочки и $\rho(S') = 0$.

Справедлива следующая

Теорема 2. Существует подсистема Φ_S системы Фабера - Шаудера с $\rho(S) = 0$, которая не является квазигриди системой в $C_{[0,1]}$.

Пусть $\Phi_S = \{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ некоторая подсистема системы (2), $S_0 = \{n_{k_j}\}_{j=1}^{\infty} \in S$ некоторое подмножество множества S и $\Delta_{n_{k_j}}$ носитель функции $\varphi_{n_{k_j}}(x)$, $j = 1, 2, \dots$. Очевидно, что для всякой $S_0 = \{n_{k_j}\}_{j=1}^{\infty} \in S$ пересечение $\bigcap_{j=1}^{\infty} \Delta_{n_{k_j}}$ либо пусто, либо точка отрезка $[0,1]$.

Если $\bigcap_{j=1}^{\infty} \Delta_{n_{k_j}} = x_0 \in [0,1]$, то точку x_0 назовем точкой сгущения носителей функций подсистемы Φ_S .

Верна следующая

Теорема 3. Для того, чтобы подсистема $\Phi_S = \{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ системы (2), являлась квазигриди базисом в замыкании своей линейной оболочки, необходимо, чтобы носители функций этой подсистемы не имели точек сгущения в множестве E_0 .

Рассмотрим подсистему

$$\{\varphi_{n_m}(x)\}_{m=1}^{\infty}, \quad (3)$$

в которой $\varphi_{n_1}(x) = \varphi_2(x) = \varphi_{2^0+1}(x)$ (носителем Δ_{n_1} является интервал $(0,1)$, $x_{n_1} = 1/2$), $\varphi_{n_2}(x) = \varphi_3(x) = \varphi_{2^1+1}(x)$ (носителем Δ_{n_2} является левая половина интервала Δ_{n_1} , $x_{n_2} = 1/4$), $\varphi_{n_3}(x) = \varphi_6(x) = \varphi_{2^2+2}(x)$ (носителем Δ_{n_3} является правая половина интервала Δ_{n_2} , $x_{n_3} = [(1/2 + 1/4)/2]$), и т.д. Носителем функции $\varphi_{n_{2m+1}}(x)$ является правая половина интервала $\Delta_{n_{2m}}$ ($x_{n_{2m+1}} = [(x_{n_{2m}} + x_{n_{2m}})/2]$), а носителем функции $\varphi_{n_{2m+2}}(x)$ является левая половина интервала $\Delta_{n_{2m+1}}$ ($x_{n_{2m+2}} = [(x_{n_{2m}} + x_{n_{2m+1}})/2]$), $m = 1, 2, \dots$.

Нетрудно показать, что все функции подсистемы (3) имеют одно и то же значение в точке $1/3$:

$$\varphi_{n_m} \left(\frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Более того, нетрудно доказать, что для каждой точки $x_0 \in E_0$ существует подсистема $\Phi_S =$

$\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что $\varphi_{n_k}(x_0) = 2/3$, $k = 1, 2, \dots$.

Совокупность таких подсистем обозначим через $\overline{\Phi}$.

Ясно, что для каждой подсистемы $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty} = \Phi_S \in \overline{\Phi}$ ряд $\sum_{k=2}^{\infty} |\varphi_{n_k}(x) - \varphi_{n_{k-1}}(x)|$ сходится в каждой точке $x \in [0,1]$. Положим

$$L_1(x) = \sum_{k=2}^{\infty} |\varphi_{n_k}(x) - \varphi_{n_{k-1}}(x)|.$$

При доказательстве теорем используется следующая

Лемма. Для каждой подсистемы $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty} = \Phi_S \in \overline{\Phi}$,

$$L_1(x) < 3, \forall x \in [0,1].$$

Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \dots \quad (4)$$

и A некоторое конечное число. По схеме Римана переставим члены ряда (4) так, чтобы он сходил к A . Члены переставленного ряда обозначим через A_k , т.е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k = A. \quad (5)$$

Рассмотрим следующий ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \varphi_{n_k}(x), \quad (6)$$

где $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty} = \Phi_S \in \overline{\Phi}$, $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ члены ряда (5). Пусть $x_0 \in [0,1]$ точка, в которой функции этой подсистемы принимают значение $2/3$. Ясно, что ряд (6) сходится в каждой точке $x \in [0,1]$, так как

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \varphi_{n_k}(x_0) = \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{\infty} A_k = \frac{2}{3} A,$$

а при $x \in [0,1] \setminus \{x_0\}$ он представляет собой конечную сумму.

Положим

$$f_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \varphi_{n_k}(x).$$

Проведя преобразование Абеля и используя лемму, нетрудно показать, что ряд (6) сходится к

$f_0(x)$ равномерно.

Пусть $x_0 \in E_0$ произвольная точка и $\Phi_S = \{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty} \in \overline{\Phi}$ такая подсистема системы (2), что $\varphi_{n_k}(x_0) = 2/3$, $k = 1, 2, \dots$. Из равномерной сходимости ряда (6) следует, что

$$f_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \varphi_{n_k}(x) \in \overline{\text{span}}(\Phi_S),$$

где $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ члены ряда (5). Из построения ряда (6) следует, что при некоторой $\sigma \in D(f_0, \Phi_S)$

$$G_m(f_0, \Phi_S, \sigma, x_0) = \sum_{k=1}^m A_{\sigma(k)} \varphi_{n_{\sigma(k)}}(x_0) = \frac{2}{3} \sum_{k=1}^m a_k.$$

Нетрудно видеть, что $\rho(S) = 0$ и для любой $\sigma \in D(f_0, \Phi_S)$,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} G_m(f_0, \Phi_S, \sigma, x_0) = +\infty.$$

Теоремы доказаны.

В заключение выражаю благодарность профессору М. Г. Григоряну, под руководством которого выполнена эта работа.

Ереванский государственный университет

Литература

1. Konyagin S. V., Temlyakov V. N. - East J. on Approx. 1999. V. 5. P. 1-15.
2. De Vore R. A., Temlyakov V. N. - Advances in Computational Math. 1996. N5. P. 173-187.
3. Wojtaszczyk P. - J. Approx. Theory. 2000. V. 107. P. 293-314.
4. Григорян М. Г. - Изв. НАН Армении. 2004. V. 39. N5. P. 1-14.
5. Grigoryan M. G. - Harmonic analysis and approximations II. 2003. International conference. Abstrac.
6. Гогян С. Л. - ДНАН Армении. 2005. V. 105. N1. P. 5-9.
7. Dilworth S. J., Kalton N. J., Kutzarova D. - STUDIA MATHEMATICA. 2003. V. 159(1). P. 67-101.
8. Schauder J. - Math. Zeit. 1927. Bd. 26. S. 47-65.

Ա. Ա. Սարգսյան

Ֆաբեր - Շաուդերի համակարգի քվադրիդի բազիսության մասին

Աշխատանքում ուսումնասիրված է $C_{[0,1]}$ -ում Ֆաբեր - Շաուդերի համակարգի ենթահամակարգերի քվադրիդիության հարցը: Ստացվել է Ֆաբեր - Շաուդերի ենթահամակարգերի՝ $C_{[0,1]}$ -ում քվադրիդի լինելու անհրաժեշտ պայման: Կառուցվել է 0 խտությամբ ենթահամակարգ, որը քվադրիդի չէ $C_{[0,1]}$ -ում:

A. A. Sargsyan

Greedy Algorithm with Regard to Faber - Schauder System

In the paper is investigated the question of Faber - Schauder subsystems to be quasi-greedy in $C_{[0,1]}$. It is obtained a necessary condition for Faber - Schauder subsystems to be quazi greedy in $C_{[0,1]}$. Subsystem with density 0 is constructed, which is not quazi-greedy in $C_{[0,1]}$.