

УДК 517.53

Академик В. С. Захарян, М. М. Мирзоян

Усиление теоремы Мейера о граничном поведении эквиморфных функций

(Представлено 6/V 2005)

В настоящей работе усиливается теорема Мейера ([1], с. 204) для эквиморфных в единичном круге D функций по произвольным касательным путям [2], а также для эквиморфных функций доказываются две теоремы о свойствах P -последовательности [3,4] и о максимальной предельного множества теоремы Коллингвуда ([1], с. 108) по произвольным касательным путям.

1. Пусть $D : |z| < 1$ - единичный круг, $\Gamma : |z| = 1$ - единичная окружность, Ω - сфера Римана (на протяжении всей работы обозначения D , Γ и Ω остаются теми же). Пусть $h : D \rightarrow D$ - такой гомеоморфизм круга D на себя, что отображения h , h^{-1} равномерно непрерывны относительно гиперболической метрики единичного круга $d\sigma(z) = (1 - |z|^2)^{-1}|dz|$; $\sigma(z_1, z_2)$ обозначает расстояние между точками $z_1, z_2 \in D$ в гиперболической метрике. Такие гомеоморфизмы принято называть эквиморфизмами [5].

В работе Х. Э. Мехия [2] введено понятие эквиморфной функции и доказано, что множество эквиморфных функций строго содержит в себе множество квазиконформных функций [6].

Эквиморфной функцией называется функция $f : D \rightarrow \Omega$, которая допускает представление $f = g \circ h$, в котором $h : D \rightarrow D$ эквиморфизм и $g : D \rightarrow \Omega$ мероморфная функция, нетождественно равная постоянной.

Пусть $\xi = e^{t\theta} \in \Gamma$. Для произвольных действительных чисел α и q , $0 < \alpha < \infty$; $q \geq 0$, назовем правым q -путем $L^+(\xi, q, \alpha)$ всякую кривую, которая задается непрерывной на $[0; 1)$ функцией $z = z(t)$ со свойствами:

$$\lim_{t \rightarrow 1} z(t) = \xi; \quad |z(t) - \xi| < \frac{1}{2}; \quad \theta < \arg z(t) < \theta + \frac{\pi}{6}, \quad \arg z(t) \rightarrow \theta \quad (\text{монотонно}),$$

$$\text{при } t \rightarrow 1 \text{ и } \lim_{t \rightarrow 1} (1 - |z(t)|)|\arg z(t) - \theta|^{-q-1} = \alpha.$$

Обозначим через $L^-(\xi, q, \alpha)$, $0 < \alpha < \infty$; $q \geq 0$, и назовем левым q -путем образ правого q -пути $L^+(\xi, q, \alpha)$ при симметрии относительно радиуса $h(\xi, 0)$ круга D в точке $\xi \in \Gamma$. Правые и левые q -пути назовем q -путями $L(\xi, q, \alpha)$ (или просто $L(\xi, q)$). Для произвольных $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $q_1 \geq 0$, $q_2 \geq 0$, $0 < \delta < [1/2]$ назовем (q_1, q_2) -углом в точке $\xi \in \Gamma$ и обозначим через $\Delta(\xi, q_1, q_2, \alpha, \beta, \delta)$ (или просто $\Delta(\xi, q_1, q_2)$, если нас не интересуют размеры этого угла) подобласть круга D , ограниченную двумя

разными $L(\xi, q_1, \alpha)$ и $L(\xi, q_2, \beta)$ путями (возможен случай $q_1 = q_2$) и окружностью $|z - \xi| = \delta$, где δ достаточно малое положительное число.

2. Для произвольной комплекснозначной функции $f : D \rightarrow \Omega$, произвольной точки $\xi \in \Gamma$ и произвольного множества $S \subset D$, для которого точка ξ является предельной точкой, рассмотрим предельное множество $C(f, \xi, S)$ функции f в точке ξ по множеству S в виде $C(f, \xi, S) =$

$$\bigcap_{r>0} \overline{f(V_r(\xi) \cap S)}, \text{ где } V_r(\xi) = \{z \in D; |z - \xi| < r\}, r > 0 \text{ и черта - замыкание множества.}$$

Пусть A - произвольное конечное множество неотрицательных чисел. Точку $\xi \in \Gamma$ отнесем к множеству $P_A(f)$, если каждый q -путь $L(\xi, q)$ содержит P -последовательность [3] функции $f(z)$. Точку $\xi \in \Gamma$ отнесем к множеству $E_A(f)$, если для любого (q_1, q_2) -угла $\Delta(\xi, q_1, q_2)$, $q_1, q_2 \in A$, справедливо $C(f, \xi, \Delta(\xi, q_1, q_2)) = C(f, \xi, D)$. Точку $\xi \in \Gamma$ отнесем к множеству $K_A(f)$, если для любых двух (q_1, q_2) и (q_1', q_2') -углов $\Delta(\xi, q_1, q_2)$ и $\Delta(\xi, q_1', q_2')$, $q_1, q_2, q_1', q_2' \in A$, имеем $C(f, \xi, \Delta(\xi, q_1, q_2)) = C(f, \xi, \Delta(\xi, q_1', q_2'))$. Ясно, что $E_A(f) \subset K_A(f)$.

3. Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $f(z)$ эквиморфная в круге D функция, $f : D \rightarrow \Omega$, имеет каноническое представление $f = g \circ h$. Тогда q -путь $L(\xi, q)$ не содержит P -последовательностей для $f(z)$ в том и только в том случае, когда найдется (q_1, q_2) -угол $\Delta(\xi, q_1, q_2)$, содержащий $L(\xi, q)$, в котором $C(Q_f \xi, \Delta(\xi, q_1, q_2))$ ограничено, где

$$Q_f(z) = (1 - |h(z)|^2) \cdot |g'(h(z))| \cdot (1 + |g(h(z))|^2)^{-1}.$$

Необходимость. Допустим противное, т.е. для любого (q_1, q_2) -угла $\Delta(\xi, q_1, q_2)$, содержащего $L(\xi, q)$, множество $C(Q_f \xi, \Delta(\xi, q_1, q_2))$ не ограничено. Тогда согласно лемме 1 из [7] для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие δ , $0 < \delta < 1$, и (q, q) -угол $\Delta(\xi, q, q)$, что

$$L(\xi, q) \cap \{z; |z - \xi| < \delta\} \subset \Delta(\xi, q, q) \subset \{z \in D; \sigma(z, L(\xi, q)) < \varepsilon\}.$$

Не нарушая общности, будем обозначать q -путь $L(\xi, q) \cap \{z; |z - \xi| < \delta\}$ опять символом $L(\xi, q)$. Но по допущению $C(Q_f \xi, \Delta(\xi, q, q))$ не ограничено. Следовательно, существует

последовательность точек $\{z_n\}$, $z_n \in \Delta(\xi, q, q)$, по которой $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_f(z_n) = \infty$. Тогда найдется подпоследовательность $\{z_j\}$ из $\{z_n\}$ такая, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sigma(z_j, L(\xi, q)) = 0 \text{ и } \lim_{j \rightarrow \infty} Q_f(z_j) = \infty.$$

Пусть $\{z_j'\}$ такая последовательность точек на q -пути $L(\xi, q)$, для которой $\lim_{j \rightarrow \infty} \sigma(z_j, z_j') = 0$. Тогда согласно теореме 6 из [2] последовательность точек $\{z_j'\}$ является P -последовательностью для $f(z)$, что невозможно. Противоречие.

Достаточность. Допустим противное, т.е. по некоторому (q_1, q_2) -углу $\Delta(\xi, q_1, q_2)$, содержащему

q -путь $L(\xi, q)$, множество $C(Q_F \xi, \Delta(\xi, q_1, q_2))$ ограничено и q -путь $L(\xi, q)$ содержит P -последовательность $\{z_n\}$ для функции $f(z)$. Тогда согласно лемме 1 из [7] найдется такой угол $\Delta(\xi, q, q)$, что $L(\xi, q) \subset \Delta(\xi, q, q) \subset \Delta(\xi, q_1, q_2)$, и значит, множество $C(Q_F \xi, \Delta(\xi, q, q))$ ограничено. Так как q -путь $L(\xi, q)$ содержит P -последовательность, то в силу теоремы 4 из [2] найдется такая последовательность $\{z_n'\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(z_n, z_n') = 0$, по которой $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_F(z_n') = \infty$. Начиная с некоторого номера n все точки z_n' попадут в (q, q) -угол $\Delta(\xi, q, q)$, и значит, $C(Q_F \xi, \Delta(\xi, q, q))$ не ограничено. Это противоречие доказывает теорему 1.

Замечание. В случае, когда $q = 0$ и f - мероморфная в D функция, теорема 1 доказана в [8], а в случае, когда $q = 1$ и f - мероморфная в D функция, она усиливает лемму 2 из [9].

4. Справедлива следующая

Теорема 2. Пусть A - произвольное конечное множество неотрицательных чисел. Если для эквиморфной в D функции $f : D \rightarrow \Omega$ в некоторой точке $\xi \in K_A(f)$, множества $C(Q_F \xi, \Delta(\xi, q_1, q_2))$ ограничены для любого (q_1, q_2) - угла, $q_1, q_2 \in A$, то для каждого q -пути $L(\xi, q)$, $q \in A$, множества $C(f, \xi, L(\xi, q))$ одинаковы и совпадают с множеством $C(f, \xi, \Delta(\xi, q_1, q_2))$. В частности, если в точке $\xi \in E_A(f)$ множество $C(Q_F \xi, D)$ ограничено, то для любого q -пути $L(\xi, q)$, $q \in A$, справедливо

$$C(f, \xi, L(\xi, q)) = C(f, \xi, D).$$

Замечание. В случае, когда $A = \{0\}$ и f - мероморфная в D функция, теорема 2 доказана в работе [8] а в случае, когда $A = \{0; 1\}$ и f - мероморфная в D функция, она является усилением леммы 3 из [9].

5. Пусть f - произвольная функция в круге D и A - произвольное конечное множество неотрицательных чисел. Точку $\xi \in \Gamma$ отнесем к множеству $M_A(f)$, если для произвольного q -пути $L(\xi, q)$, $q \in A$, имеем $C(f, \xi, L(\xi, q)) = C(f, \xi, D) \neq \Omega$. Точку $\xi \in \Gamma$ отнесем к множеству $I_A(f)$, если для произвольного (q_1, q_2) -угла $\Delta(\xi, q_1, q_2)$, $q_1, q_2 \in A$ имеем $C(f, \xi, \Delta(\xi, q_1, q_2)) = \Omega$. Ясно, что для произвольной функции $f : D \rightarrow \Omega$ множества $I_A(f)$, $M_A(f)$ являются непересекающимися подмножествами множества $K_A(f)$.

Справедлива следующая теорема, которая является усилением теоремы 1 из [7].

Теорема 3. Пусть f произвольная функция $f : D \rightarrow \Omega$, а A произвольное конечное множество неотрицательных чисел. Тогда $\Gamma = E_A(f) \cup F$, где F - множество первой категории и типа F_σ на Γ .

Замечание. В случае, когда $A = \{0\}$, теорема 3 доказана Е. П. Долженко ([1], с. 249), в случае, когда $A = \{0; 1\}$, она усиливает лемму 1 из [9].

Теорема 4. Для произвольной эквиморфной в круге D функции $f : D \rightarrow \Omega$ и для произвольного конечного множества A неотрицательных чисел справедливо

$$E_A(f) = M_A(f) \cup I_A(f).$$

Для доказательства теоремы 4 достаточно доказать вложение $E_A(f) \subset M_A(f) \cup I_A(f)$, поскольку обратное вложение следует из определений участвующих в нем множеств. Рассмотрим произвольную точку $\xi \in E_A(f)$, в которой $C(f, \xi, D) \neq \Omega$. Тогда согласно теореме 4 из [2] $\lim_{z \rightarrow \xi} \sup Q_f(z) < \infty$, $z \in D$, и значит, в силу теоремы 2 $\xi \in M_A(f)$. В случае, когда $C(f, \xi, D) = \Omega$, заключаем, что $\xi \in I_A(f)$, т.е. теорема 4 доказана.

Замечание. В случае, когда f - мероморфная в D функция, теорема 4 усиливает лемму 4 из [7], а в случае, когда $A = \{0\}$ и f - мероморфная в D функция, она доказана в [10].

Объединяя результаты теорем 3 и 4, получаем следующую теорему, которая является усилением теоремы Мейера ([4], с. 204).

Теорема 5. *Для произвольной эквиморфной в D функции $f : D \rightarrow \Omega$ и для произвольного конечного множества A неотрицательных чисел справедливо разложение*

$$\Gamma = M_A(f) \cup I_A(f) \cup F,$$

где F - множество первой категории и типа F_σ на Γ .

Замечание. В случае, когда f - мероморфная в D функция, теорема 5 усиливает теорему 3 из [7], в случае, когда $A = \{0\}$ и f - эквиморфная в D функция, она доказана в работе [2], в случае, когда $A = \{0\}$ и f - мероморфная в D функция, - в работе [10], а в топологических пространствах сходные теоремы доказаны в работах [11-13].

Государственный инженерный университет Армении

Литература

1. Коллингдвуд Э., Ловатер А. Теория предельных множеств. М. Мир. 1971. 312 с.
2. Мехия Х. Э. - ДАН СССР. 1982. Т. 265. N1. С. 35-38.
3. Гаврилов В. И. - Матем. сб. 1965. Т. 67 (109). N3. С. 408-427.
4. Гаврилов В. И. - Матем. сб. 1966. Т. 71 (113). N3. С. 386-404.
5. Ефремович В. А. - Матем. сб. 1952. Т. 31. Вып. 1. С. 189-200.
6. Lehto O., Virtanen K. I. - Quasiconformal mappings in the plane. Berlin. Springer-Verlag. 1973.
7. Мирзоян М. М. - ДАН Арм. ССР. 1978. Т. 66. N4. С. 200-204.
8. Гаврилов В. И. - ДАН СССР. 1974. Т. 216. N1. С. 21-23.
9. Айрапетян А. Н., Гаврилов В. И. - Изв. АН Арм.ССР. Математика. 1976. Т. 11. N5. С. 390-399.
10. Гаврилов В. И., Канатинков А. Н. - ДАН СССР. 1977. Т. 233. N1. С. 15-17.
11. Гаврилов В. И., Канатинков А. Н. - Математички весник. 1988. (40). Херцег-Нови. Югославия. С. 217-223.
12. Гаврилов В. И., Канатинков А. Н., Кравцев С. В., Симушев А. А. - Математички весник. 1986. (38). Будва. Югославия. С. 437-450.
13. Абду Аль-Рахман Хасан - ДАН СССР. 1981. Т. 260. N4. С. 777-780.

Ակադեմիկոս Վ. Ս. Ջաքարյան, Մ. Մ. Միրզոյան

**Մեյերի Էկվիմորֆ ֆունկցիաների եզրային վարքի վերաբերյալ
թեորեմի ուժեղացումը**

Հոդվածում Էկվիմորֆ [2] ֆունկցիաների համար տրվում են երկու թեորեմներ Գավրիլովի P-հաջորդականության [3] և Կոլինգվուդի մաքսիմալության թեորեմի ([1], էջ 108) վերաբերյալ՝ միավոր շրջանագծի հետ կամայական շոշափման կարգ ունեցող ուղիների երկայնքով: Այնուհետև ուժեղացվում է Մեյերի թեորեմը ([1], էջ 204) Էկվիմորֆ ֆունկցիաների համար, ինչպես նաև ընդհանրացվում է Դոլժենկոյի ([1], էջ 249) թեորեմը՝ կամայական շոշափող ուղղություններով կամայական ֆունկցիաների համար:

Academician V. S. Zakaryan, M. M. Mirzoyan

**Strengthening of Meier's Theorem about Boundary Behaviour
of Equimorphic Functions**

In this paper for equimorphic [2] functions two theorems are given about Gavrilo's P-sequence [3] and Collingwood's maximality theorem ([1], p.108) along lines that have arbitrary tangential order with the unit circle. Afterwards Meier's theorem is strengthened ([1], p.204) for equimorphic functions, as well as Dolzhenko's theorem ([1], p.249) along arbitrary tangential directions is generalized for arbitrary functions.