УДК 517.53

С. Л. Берберян

# Об угловых граничных значениях гармонических функций, порождающих нормальные семейства на подгруппах автоморфизмов единичного круга

(Представлено академиком В. С. Захаряном 24/ III 2005)

Понятие нормальной функции, рассмотренное для мероморфных функций и состоящее в свойстве порождать нормальное семейство на группе T всех конформных автоморфизмов области определения, было затем перенесено на гармонические и субгармонические функции. В случае единичного круга D : |z| < 1 группа T состоит из элементов T : $\{S(z) = e^{t\alpha}(z + a)(1 + \bar{\alpha}z)^{-1}$, где a - произвольная точка в D, α - произвольное действительное число (см. например [1-3]). В статье [4] была сформулирована задача об изучении граничных свойств мероморфных функций, порождающих нормальные семейства на подгруппах группы T. В качестве примера была рассмотрена подгруппа $T^{\theta}$ : $\{S_{\alpha}{}^{\theta}(z) = (z + ae^{t\theta})(1 + aze^{-t\theta})$, a изменяется в интервале (–1,1) и θ, 0 ≤ θ ≤ π, фиксировано. Исследования были продолжены в работах [6,7] и др.

Действительнозначную функцию u(z) отнесём к классу $U^{\theta}(0 \le \theta \le \pi$ фиксировано), если порождаемое ею семейство $\{U(S_{\alpha}{}^{\theta}(z)); S_{\alpha}{}^{\theta} \in T^{\theta}\}$ нормально в D в смысле Монтеля. Обозначим для любой точки $\xi = e^{t\theta} \in C : |z| = 1$ через $H(\xi,\varphi_1,\varphi_2)$ область, ограниченную двумя гиперциклами $L(\xi,\varphi_1)$ и $L(\xi,\varphi_2)$, проходящими через ξ и –ξ и образующими углы $\varphi_1$ и $\varphi_2$ с диаметром, соединяющим точки ξ и –ξ. Обозначим через $\rho(z_1,z_2)$ неевклидово расстояние между точками $z_1,z_2 \in D$. Для произвольной точки ξ окружности Γ : |z| = 1 обозначим через h (ξ,φ) хорду круга D, оканчивающуюся в точке ξ и образующую с радиусом в этой точке угол раствора φ,–[(π)/2] < φ < [(π)/2]. Подобласть круга D, расположенную между хордами $h(\xi,\varphi_1)$ и h $(\xi,\varphi_2)$, где $-[(\pi)/2] < \varphi_1 < \varphi_2 < [(\pi)/2]$, обозначим через $\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2)$. Пусть R = (–∞, +∞) и $\bar{R} = \{-\infty\} \cup R \cup \{+\infty\}$. Скажем, что функция u(z) имеет угловой предел α в точке ξ ∈ Γ, если $C(u,\xi,\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2)) = \alpha$ для всех углов $\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2)$, где $\varphi_1,\varphi_2 \in (-[(\pi)/2],[(\pi)/2])$.

Если же $C(u,\xi,\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2)) = R$ для всех углов $\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2)$, где $\varphi_1,\varphi_2 \in (-[(\pi)/2],[(\pi)/2])$, то точку ξ называют точкой Плеснера.

Для доказательства результатов работы предварительно приведём несколько лемм, необходимых для дальнейшего.

**Лемма 1.** *Пусть непрерывная в* D *функция* $u(z) \in U^{\theta}$*, где* $0 < \theta < \pi$ *фиксировано, имеет* $\lim\limits_{n\to\infty}$ u

$(z_n) = c$ *по некоторой последовательности* $\{z_n\} \in H((\xi,\varphi_1,\varphi_2)$, $z_{n\to}\xi = e^{t\theta}$ *(или* $-e^{t\theta}$*). Если* $\{z_n'\}$ *произвольная последовательность точек в* D, *для которой* $\rho(z_{n,}, z_n') \to 0$ *при* $n \to \infty$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} u(z_n') = c$.

Доказательство утверждения леммы 1 проведено в работе [8].

**Лемма 2.** *Пусть гармоническая в* D *функция* $u(z) \in U^{\theta}$, *где* $0 \le \theta < \pi$ *и предельные множества* $C(u,\xi,h((\xi,\varphi_1))$, $C(u,\xi,h((\xi,\varphi_2))$ *ограничены сверху числом* $\alpha$ *(или ограничены снизу числом* $\alpha$*). Тогда предельное множество* $C(u,\xi,\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2))$ *также ограничено сверху (снизу) числом* $\alpha$.

Доказательство леммы 2 с учётом леммы 1 проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы для нормальных и субгармонических функций в работе [9]. Поэтому мы его опускаем.

**Лемма 3.** *Пусть гармоническая в* D *функция* $u(z) \in U^{\theta}$, *где* $0 \le \theta < \pi$ *фиксировано. Если* $\lim\limits_{z\to\zeta, z\in H(\xi,\varphi_1,\varphi_2)} u(z) = \alpha$, *то* $\alpha$ *будет угловым пределом функции* $u(z)$ *в точке* $\xi$.

Доказательство утверждения леммы 3 мы также не приводим, так как наши рассуждения аналогичны рассуждениям Мика при доказательстве теоремы о существовании угловых граничных у нормальных гармонических функций (см.[3]).

**Лемма 4.** *Пусть гармоническая в* D *функция* $u(z) \in U^{\theta}$*, где* $0 \le \theta < \pi$ *и* $\xi$ - *произвольная точка окружности* $\Gamma$. *Тогда предельные множества* $C(u,\xi,L((\xi,\varphi))$, $C(u,\xi,h((\xi,\varphi))$ *совпадают при любом* $\varphi \in (-[(\pi)/2],[(\pi)/2])$.

Доказательство леммы 4 с учётом леммы 1 проводится так же, как и доказательство леммы работы [9].

**Теорема 1.** *Пусть гармоническая в* D *функция* $u(z) \in U^{\theta}$, *где* $0 \le \theta < \pi$ *фиксировано. Для того, чтобы функция* $u'(z)$ *имела в точке* $\xi = e^{t\theta}$ *(или* $\xi = -e^{t\theta}$*) угловой предел* $\alpha$, *необходимо и достаточно существование двух таких хорд* $h(\xi,\varphi_1)$ *и* $h(\xi,\varphi_2)$, *для которых справедливо соотношение*

$$\lim_{z\to\zeta, z\in h(\xi,\varphi_1)} u(z) = \lim_{z\to\zeta, z\in h(\xi,\varphi_2)} u(z) = \alpha(1).$$

**Доказательство.** Необходимость очевидна. Для доказательства достаточности заметим, что предельные множества $C(u,\xi,h((\xi,\varphi_1))$ и $C(u,\xi,h((\xi,\varphi_2))$ ограничены сверху и снизу числом $\alpha$. Из утверждения леммы 2 следует, что предельное множество $C(u,\xi,\Delta((\xi,\varphi_1,\varphi_2))$ также ограничено сверху и снизу числом $\alpha$. Следовательно $\lim\limits_{z\to\zeta, z\in\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2)} u(z) = \alpha$. Отсюда в силу утверждения леммы 3 получим, что $u(z)$ в точке $\xi$ имеет угловой предел $\alpha$, что и требовалось доказать.

**Замечание.** Отметим, что в силу утверждения леммы 4 можно в теореме 1 вместо хорд $h(\xi,\varphi_1)$ и $h(\xi,\varphi_2)$ рассматривать гиперциклы $L(\xi,\varphi_1)$ и $L(\xi,\varphi_2)$. Утверждение теоремы останется в силе.

Рассмотрим ещё одну теорему о существовании угловых значений в произвольной точке $\xi \in \Gamma$.

**Теорема 2.** *Пусть гармоническая в* D *функция* $u(z) \in U^{\theta}$, *где* $0 \le \theta < \pi$ *фиксировано. Для того, чтобы функция* $u(z)$ *имела в точке* $\xi = e^{t\theta}$ *(или* $\xi = -e^{t\theta}$*) угловой предел* $\alpha$, *необходимо и достаточно, чтобы предельные множества* $C(u,\xi,L((\xi,\varphi_1))$ и $C(u,\xi,L((\xi,\varphi_2))$ *были ограничены сверху (или снизу) числом* $\alpha$ *и существовала такая кривая* L *с концами в точке* $\xi$, *целиком содержащаяся в некоторой области* $H(\xi,\varphi_1',\varphi_2') \subset H(\xi,\varphi_1,\varphi_2)$, *что* $\lim\limits_{z\in L, z\to\zeta} u(z) = \alpha$.

**Доказательство** теоремы 2 проводится в случае ограниченности сверху числом $\alpha$. В силу леммы 4 будем иметь, что предельные множества $C(u,\xi,h((\xi,\varphi_1))$ и $C(u,\xi,h((\xi,\varphi_2))$ будут также ограничены сверху числом $\alpha$. Отсюда согласно утверждению леммы 2 следует, что $C(u,\xi,\Delta((\xi,\varphi_1,\varphi_2))$ ограничено сверху числом $\alpha$. Поэтому и предельное множество $C(u,\xi,H(\xi,\varphi_1',\varphi_2'))$ ограничено сверху (или снизу) числом $\alpha$.

Покажем, что $\lim\limits_{z\to\zeta, z\in H(\xi,\varphi_1,\varphi_2)} u(z) = \alpha$. Пусть $z_n$ - произвольная последовательность точек в $H(\xi,\varphi_1',\varphi_2')$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \xi$. Без нарушения общности будем считать, что $\xi = 1$. Для произвольного n, n = 1,2,…, опустим из точки $z_n$ на диаметр в точке $\xi$ неевклидовый перпендикуляр $E_n$ и обозначим через $A_n$, и $B_n$ два гиперцикла неевклидового расстояния $\rho = 1$ от $E_n$.

Определим через $G_n,\varphi'_1,\varphi'_2$ открытое множество в D, ограниченное $A_n$, $B_n$ и гиперциклами $L(\xi,\varphi'_1)$ и $L(\xi,\varphi'_2)$. Через $G_n,\varphi_1,\varphi_2$ обозначим открытое множество в D, ограниченное $A_n$, $B_n$ и двумя гиперциклами $L(\xi,\varphi_1)$ и $L(\xi,\varphi_2)$.

Пусть $r_n$ - пересечение $E_n$ с диаметром в точке $\xi$ и для любого n, n = 1,2,…, обозначим $\omega = S_n(z) = [(z + r_n)/(1 + r_n z)]$. Через $q_n$ обозначим точки пересечения $E_n$ с кривой L при любом n.

Прообраз $S_n^{-1}(G_n,\varphi'_1,\varphi'_2) = Q_n,\varphi_1',\varphi_2'$, при любом n, n = 1,2,…, есть область в D, ограниченная четырьмя гиперциклами, два из которых симметричны относительно диаметра, а два других симметричны относительно $-1 < y < 1$, где $z = x + iy = S_n^{-1}(\omega)$. Аналогично $S_n^{-1}(G_n,\varphi_1,\varphi_2) = Q_n,\varphi_1,\varphi_2$. Таким образом, при любом n

$$Q_n,\varphi_1',\varphi_2' = Q_{n+1},\varphi_1',\varphi_2' = Q', \quad Q_n,\varphi_1,\varphi_2 = Q_{n+1},\varphi_1,\varphi_2 \text{ и } \overline{Q'} \subset \overline{Q} \subset D.$$

Будем считать, что $|\varphi_1'| \le |\varphi_2'|$ и $|\varphi_1| \le |\varphi_2|$. Так как $u(z) \in U^{\theta}$, то существует подпоследовательность $[u(Sn_k(z))]$, которая равномерно сходится на $\overline{Q}$ к субгармонической функции $U(z)$ или равномерно расходится к $\pm\infty$. Обозначим через $q_n'$ прообразы точек $q_n$ при отображениях $S_n(z)$ при любом n. Так как последовательности $\{q_n\}$ и $\{z_n\}$ лежат в области $H(\xi,\varphi_1')$, то $\rho(q_n,z_n) \le M$ при $n = 1,2,\dots$, где $M = \rho(0,\operatorname{arctg} \varphi_2'/2)$. В силу инвариантности метрики $\rho$ при отображениях $S_n(z)$ и условий $Sn_k(0) = r_{nk}$ и $-Sn_k(q_{nk'}) = qn_k$, $Sn_k(Zn_k') = Zn_k$ будем иметь, что прообразы последовательностей $\{r_{nk}\}$ и $\{q_{nk}\}$ лежат на компакте $\overline{Q'}$.

Так как $\overline{G_n,\varphi_1',\varphi_2'} \subset \overline{H(\xi,\varphi_1',\varphi_2')}$ и $\overline{G_n,\varphi_1,\varphi_2} \subset \overline{H(\xi,\varphi_1,\varphi_2)}$ при любом n, то при конечном $\alpha$ отсюда следует, что предельная функция $U(z)$ подпоследовательности $u[(Sn_j(z))]$ ограничена сверху числом $\alpha$ на компакте $\overline{Q}$, а следовательно на компакте $\overline{Q'}$. Подпоследовательности $\{q_{nk'}\}$ и $\{Zn_k'\}$ имеют по крайней мере по одной предельной точке на $\overline{Q'}$, которые обозначим соответственно $q'_0$ и $z_0'$, причём $q_0' \in \overline{Q'}$. Так как $\lim\limits_{k\to\infty} u(S_{nk}(q_{nk'})) = \lim\limits_{k\to\infty} u(q_{nk}) = \alpha$, то и $U(q_0') = \lim\limits_{k\to\infty} U(q_{nk'}) = \alpha$. В силу принципа максимума модуля для гармонических функций имеем, что $U(z) \equiv \alpha$. Отсюда следует, что

$$\lim_{k\to\infty} u(s_{nk}(z_{nk'})) = \lim_{k\to\infty} u(z_{nk}) = \alpha.$$

В силу того, что произвольная последовательность точек $\{Z_n\}$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_{n=\xi}$, принадлежащая области $H(\xi,\varphi_1',\varphi_2')$, содержит подпоследовательность $\{z_{nk}\}$, по которой $\lim\limits_{k\to\infty} u(z_{nk}) = \alpha$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} u(z_n) = \alpha$. Следовательно $\lim\limits_{z\to\xi,\, z\in H(\xi,\varphi_1',\varphi_2')} u(z) = \alpha$ и согласно утверждению леммы 3 $u(z)$ имеет в точке $\xi$ угловой предел $\alpha$, что и требовалось доказать. При $\alpha \equiv \infty$ легко видеть, что $U(z) \equiv +\infty$ и угловой предел $u(z)$ равен $+\infty$.

То, что условия теорем 1,2 существенны, показывает пример функции $u(z) = \arg(1 - z)$.

**Теорема 3.** *Пусть гармоническая в* D *функция* $u(z) \in U^{\theta}$*, где* $0 \le \theta < \pi$ *фиксировано. Для того, чтобы точка* $\xi = e^{t\theta}$ *была точкой Плеснера для функции* $u(z)$*, необходимо и достаточно существование некоторой последовательности* $\{z_n\} \to \xi$*, целиком содержащейся в некоторой области* $H(\xi,\varphi_1,\varphi_2)$*, для которой предельное множество* $C(u,\xi,z_n)$ *не ограничено сверху и снизу.*

**Доказательство.** Небходимость очевидна. Для доказательства достаточности заметим, что предельное множество $C(u,\xi,\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2))$ для всех углов $\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2)$, где $\varphi_1,\varphi_2 \in (-[(\pi)/2],[(\pi)/2])$, должно быть не ограничено сверху и снизу. Действительно, если хотя бы для одного угла $\Delta_1(\xi,\varphi_1',\varphi_2')$ предельное множество $C(u,\xi,\Delta(\xi,\varphi_1',\varphi_2'))$ было бы ограничено сверху (или снизу), то согласно известной теореме (см.[6]) для любого угла $\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2)$ предельное множество $C(u,\xi,\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2))$ ограничено сверху (или снизу), что противоречит условию теоремы. Учитывая, что $u(z)$ - непрерывная функция и любой угол $\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2)$ связное множество, будем иметь, что для любого угла $\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2)$, где $\varphi_1,\varphi_2 \in (-[(\pi)/2],[(\pi)/2])$, справедливо соотношение $C(u,\xi,\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2)) = \overline{\mathbb{R}}$. А это значит, что точка $\xi = e^{t\theta}$ является точкой Плеснера, что и требовалось доказать.

Российско-Армянский (Славянский) государственный университет

## Литература

1. *Носиро К.* Предельные множества. М. ИЛ, 1963.
2. *Rung D. C.* - Math. Zeitschrift. 1964. Bd. 84. Hf.1. P. 9-15.
3. *Meek J.* - Math. Iaponica. 1977. V. 22. P. 309-314.
4. *Гаврилов В. И.* - ДАН СССР. 1978. Т. 240. № 4. С. 768-770.
5. *Гаврилов В. И., Захарян В. С., Субботин А. Б.* - ДНАН Армении. 2002. Т. 102. №3. С. 203-210.
6. *Берберян С. Л.* - Изв. АН Арм. ССР. Математика. 1980. Т. 15. №5. С. 395-402.
7. *Берберян С. Л.* - ДНАН Армении. 2002. Т. 102. №3. С. 211-213.
8. *Берберян С. Л.* - Изв. вузов. 1986. №3. С. 22-28.
9. *Берберян С. Л.* - Математика в высшей школе. Межвуз. сб. науч. и методических статей. Ереван. 2003. №5. С. 77-82.

Ս. Լ. Բերբերյան

**Միավոր շրջանի ավտոմորֆիզմների ենթախմբերի վրա նորմալ ընտանիքների հարմոնիկ ֆունկցիաների անկյունային եզրային արժեքների մասին**

Հոդվածում ուսումնասիրվում է նորմալ հարմոնիկ ֆունկցիաներից առավել ընդհանուր հարմոնիկ ֆունկցիաների դասը, և տրվում են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ Ֆատուի և Պլեսների կետերի գոյության համար:

**S. L. Berberyan**

**On Harmonic Functions Angular Boundary Values Effecting the Formation of Normal Families Circle Unit Automorphism Subgroups**

The article deals with the class of broad harmonic functions which is broader than the normal harmonic functions. It also demonstrates the conditions which are necessary and sufficient for the existence of Fatous and Plesners points.