УДК 539.2

Р. М. Мовсесян, А. С. Саакян

Одноэлектронные состояния квантового сектора в ааронов-бомовском магнитном поле

(Представлено академиком А. Р. Мкртчяном 30/VII 2004)

Исследованы одноэлектронные состояния в 2D-секториальной квантовой яме в присутствии ааронов-бомовского магнитного поля. Показано, что электронные энергетические уровни являются осциллирующими функциями магнитного потока.

1. Геометрическая форма системы существенно влияет на спектр элементарных возбуждений [1,2]. Здесь, как и в работе [3], рассмотрена круговая система радиуса R, состоящая из секториальной квантовой ямы и смежного с ней барьера. Поведение электронов в этой системе внешне напоминает известное в квантовой механике падение на центр [4], однако существенно, что система обладает основным состоянием.

Система находится во внешнем, нормальном к ее поверхности магнитном поле, локализованном в концентрической круговой области. Для простоты будем полагать, что размеры области локализации поля одного порядка с линейным размером вершины сектора (ясно, что вершина сектора не является идеально заостренной, но имеет конечный размер a) и $a \ll R$. Итак, электроны системы находятся под действием не самого магнитного поля, но вектор-потенциала. Отмеченное выше упрощение позволяет досконально исследовать влияние ааронов-бомовского магнитного поля на одно-электронные состояния. Известно, что в описанной ситуации волновая функция приобретает фазу [5], пропорциональную магнитному потоку, что фактически разрушает периодичность системы [6]. Эта ситуация хорошо исследована в полых сверхпроводниках [7] и металлических баллистических кольцах [8]. Было также показано, что все макроскопические величины являются осциллирующими функциями магнитного потока (теорема Байерса - Блоха - Янга [9,10]).

В настоящей работе получены энергетический спектр и одноэлектронные волновые функции для описанной выше секториальной системы. Показана осциллирующая зависимость спектра от магнитного потока; в зависимости от величины потока меняется качественный характер поведения электрона.

2. Одноэлектронное уравнение Шредингера для секториальной системы с потоком имеет вид

$$\frac{1}{2m}\left(\hat{\vec{p}}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2\Psi + U\Psi = E\Psi, \tag{1}$$

где

$$U = \begin{cases} 0, & 0 \le \varphi \le \varphi_0 \quad (I) \\ U_0, & \varphi_0 \le \varphi \le 2\pi \quad (II) \end{cases} \tag{2}$$

с периодическим продолжением в область $\varphi > 2\pi$.

Вектор-потенциал $\vec{A}$ выберем в виде [5]

$$\vec{A} = \frac{\Phi}{2\pi}\vec{\nabla}\varphi, \tag{3}$$

φ - полярный угол; Φ - магнитный поток через область вершины сектора, $\vec{A} = (A_\varphi, 0)$.

Тогда выполняются следующие условия:

$$\oint\limits_L \vec{A}\,d\vec{l} = \Phi, \tag{4a}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{A} = 0, \tag{4b}$$

где контур l охватывает область вершины сектора, а условие (4b) верно во всей области системы кроме области, где есть магнитное поле.

Для решения уравнения (1) мы используем адиабатическое приближение, полагая быстрой азимутальную степень свободы.

Волновую функцию $\Psi(r,\varphi)$ представим в виде

$$\Psi(r,\varphi) = \psi(r,\varphi)\chi(r), \tag{5}$$

полагая, что $\psi(r,\varphi)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{1}{2m}\left(\hat{p}_\varphi - \frac{e}{c}A_\varphi\right)^2\psi + U\psi = E_0\psi. \tag{6}$$

Состояния, определяемые уравнением (6), имеют блоховский вид

$$\psi = \psi_0 e^{i\alpha\varphi}, \tag{7}$$

φ_0 - волновая функция азимутальной степени свободы, обладающая 2π-периодичностью, а роль блоховского волнового числа играет отношение $\alpha = \Phi/\Phi_0$, где $\Phi_0 = \hbar c/e$ - элементарный поток.

В интервале $[0,2\pi]$ представим волновую функцию ψ_0 в виде

$$\psi_{0,I} = (A_1 e^{i\lambda\varphi} + A_2 e^{-i\lambda\varphi}) e^{i\alpha\varphi},$$

$$\psi_{0,II} = (B_1 e^{\mu\varphi} + B_2 e^{-\mu\varphi}) e^{i\alpha\varphi}, \tag{8}$$

где индексы I и II нумеруют области $[0,\varphi_0]$ и $[\varphi_0,2\pi]$ соответственно, $\lambda = \frac{\sqrt{2mE_0}}{\hbar} r$, $\mu = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(U - E_0)} r$ и $\psi_{0,I}$, $\psi_{0,II}$ удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$\psi_I(\varphi_0) = \psi_{II}(\varphi_0), \qquad \psi'_I(\varphi_0) = \psi'_{II}(\varphi_0),$$

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(2\pi), \qquad \psi'_I(0) = \psi'_{II}(2\pi), \tag{9}$$

которые с учетом (8) приводят к следующему дисперсионному уравнению для определения энергетического параметра E_0:

$$\cos(\lambda\varphi_0)\mathrm{ch}(\mu b) + \frac{\mu^2 - \lambda^2}{2\mu\lambda} \sin(\lambda\varphi_0)\mathrm{sh}(\mu b) = \cos 2\pi\alpha,$$

$$b = 2\pi - \varphi_0, \tag{10}$$

совпадающего с дисперсионным уравнением задачи Кронига - Пени.

Из-за трансцендентности уравнение (10) можно решить в некоторых предельных случаях. Здесь будет рассмотрен наиболее интересный из них. Пусть одиночная потенциальная яма содержит уровень, расположенный достаточно близко к ее поверхности $\varepsilon_0 \le U$. В случае бесконечного числа ям этот уровень размывается в зону. В связи с этим решение ищем в виде

$$E_0 = \varepsilon_0 - \delta(\alpha), \qquad \delta_{max}(\alpha) << U. \tag{11}$$

Разложим правую часть уравнения (10) в ряд по степеням δ, удержав нулевой и линейный по δ члены. В результате уравнение (10) расщепляется на два: решением одного является

$$E_0 = \varepsilon_0 - \frac{2\hbar^2}{mb\varphi_0 r^2}\cos 2\pi\alpha, \tag{12}$$

$$r \gg \frac{2r_0}{\sqrt{b\varphi_0}}, \qquad r_0 = \frac{\hbar}{\sqrt{mU}}; \tag{12a}$$

второе уравнение имеет вид

$$\operatorname{th}\frac{rb}{R_0} = \frac{2r_0}{R_0}\operatorname{ctg}\frac{r\varphi_0}{R_0}, \qquad R_0 = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(U-\varepsilon_0)}}, \tag{13}$$

решением которого является энергия локализованного состояния в одиночной яме. В области (12a) оно обладает следующим решением:

$$\varepsilon_0 = U - \frac{\hbar^2}{2mb^2r^2}, \tag{14}$$

так что окончательно

$$E_0 = U - \frac{\hbar^2}{2mb^2r^2} - \frac{2\hbar^2}{mb\varphi_0 r^2}\cos 2\pi\alpha. \tag{15}$$

Итак, собственные значения энергии азимутальной степени свободы являются осциллирующими функциями магнитного потока и заполняют "зону" шириной $4\hbar^2/mb\varphi_0 r^2$. Из (15) видно, что в области значений потока $\cos 2\pi\alpha < -(\varphi_/2b)$ зонные уровни располагаются над ямой; туннелирование с высоко расположенного уровня приводит к тому, что угловая область локализации электрона становится равной $\sqrt{b\varphi_0}$, т.е. в $\sqrt{b/\varphi_0}$ раз превышает угловой раствор сектора φ_0.

Подставив (5) в уравнение (1), умножим слева на $\psi(r,\varphi)$ и проинтегрируем по φ; в результате придем к следующему уравнению, определяющему состояния медленной подсистемы:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_r\chi + E_0(r)\chi = E\chi + \hat{C}\chi, \qquad (16)$$

где Δ_r - радиальная часть 2D-лапласиана, $E_0(r)$ определяется выражением (15), а $\hat{C}$ - оператор неадиабатичности имеет следующий вид:

$$\hat{C}\chi = \frac{\hbar^2}{2m}\left[\int_0^{2\pi}\psi^*(\Delta_r\psi)\chi d\varphi + \int_0^{2\pi}\psi\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial\chi}{\partial r}d\varphi\right]. \qquad (17)$$

В дальнейшем этим членом пренебрежем. Обоснование этого приближения дадим позже. Рассматриваем уравнение

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_r\chi + E_0(r)\chi = E\chi, \qquad (18)$$

или

$$r^2\chi'' + r\chi' + (\gamma - k^2r^2)\chi = 0,$$

$$k^2 = \frac{2m(U-E)}{\hbar}, \quad \gamma = \frac{4}{b\varphi_0}\left(\frac{\varphi_0}{4b} + \cos 2\pi\alpha\right). \qquad (18a)$$

Параметр γ в (18a), а следовательно, и сингулярный потенциал $E_0(r)$ являются знакопеременными функциями α - притяжение периодически сменяется отталкиванием. Поведение электронов вблизи вершины сектора существенно зависит от этого обстоятельства.

Рассмотрим сначала случай $\gamma > 0$, $k^2 > 0$ (внутриямные состояния). Волновую функцию можно представить в виде

$$\chi(r) = AJ_{i\beta}(ikr) + A^*J_{-i\beta}(-ikr), \quad \beta = \sqrt{\bar{\gamma}}. \qquad (19)$$

Наложим на волновую функцию (19) граничные условия

$$\chi(a) = \chi(R) = 0, \qquad (20)$$

в результате придем к дисперсионному уравнению

$$J_{i\beta}(ikR)J_{-i\beta}(ika) - J_{i\beta}(ika)J_{-i\beta}(ikR) = 0, \qquad (21)$$

тогда в приближении ka << 1, kR >> 1 получим следующее выражение для спектра:

$$E = U - \frac{2\hbar^2}{ma^2} \exp\left\{ \frac{1}{\beta} \left[2\alpha + \pi \left(\frac{1}{2} - 2n \right) \right] \right\}, \quad n = 1,2,3,..., \tag{22}$$

а волновая функция (19) в непосредственной близости к вершине имеет вид

$$\chi(r) \cong \sin\left(\beta \ln \frac{r}{a} \right), \tag{23}$$

внешне совпадающий с волновой функцией частицы, падающей на центр, однако первое из условий (20) ограничивает число осцилляций вблизи вершины; этим и обеспечивается существование основного состояния.

Аналогично можно исследовать надъямные состояния ($\gamma > 0, k^2 < 0$): волновая функция вблизи вершины имеет вид, совпадающий с (23), а спектр энергий следующий:

$$E = U + \frac{\hbar^2}{2mR^2} \left(\varphi_0 - \xi + \beta \ln^2 \frac{R}{a} + \pi n \right)^2, \quad \mathrm{tg}\xi = \mathrm{th} \frac{\pi\beta}{2}, \tag{24}$$

близкий к спектру в одномерной яме бесконечной глубины; это обусловлено вторым из граничных условий (20).

Рассмотрим теперь случай $\gamma < 0$ ("большой" магнитный поток). Легко показать, что в этом случае внутриямные состояния отсутствуют, а спектр надъямных состояний

$$E = U + \frac{\pi^2\hbar^2}{2mR^2} \left(\frac{\beta}{2} + \frac{3}{4} + l \right)^2. \tag{25}$$

В (24) и (25) n и l пробегают целочисленные значения, а волновая функция в непосредственной близости от вершины приобретает вид

$$\chi \cong \mathrm{sh}\left(\beta \ln \frac{r}{a} \right), \tag{26}$$

т.е. осцилляции отсутствуют.

Таким образом, с изменением величины магнитного потока существенно меняется картина поведения электронов: если в области $\gamma > 0$ состояния близки к состояниям с падением на центр, то в области $\gamma < 0$ это явление отсутствует.

Покажем теперь, что оператором неадиабатичности в уравнении (16) можно пренебречь.

Параметр μ в (8) в рассматриваемом приближении не зависит от r, поэтому производные по r обращаются в нуль и в области II $\hat{C}\chi$ тождественно равно нулю. В области I, как это легко показать, $\hat{C}\chi \sim \varphi_0^2$. К адиабатичности системы приводят два важных обстоятельства: малость φ_0 и существование еще одного малого параметра - $|U - E_0(r)|$; благодаря именно этому условию туннелирование азимутальной степени свободы является быстрым.

Государственный инженерный университет Армении

Литература

1. *Андо Т., Фаулер А., Стерн Ф.* Электронные свойства двумерных систем. М. Мир. 1985. 380 с.
2. *Imry Y.* Introduction to Mesoscopic Physics. Oxford. Univ. Press. 2002. 296 c.
3. *Мовсесян Р. М., Саакян А. С.* - Изв. НАН Армении. Физика. 2004. Т 39. N3. С. 147.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. М. Наука. 1963. 700 с.
5. *Aharonov Y., Bohm D.* - Phys. Rev. 1959. V. 115. P. 485.
6. *Cheung H-F., Gefen l., Riedel E., Shih W-H.* - Phys. Rev. 1988. V. 37. P. 11.
7. *Шарвин Д. Ю., Шарвин Ю. В.* - ЖЭТФ. 1965. Т. 48. С. 984.
8. *Levi A. F.* Physics Today. FEB. 1990. V. 43. P. 58.
9. *Byers N., Yang C. N.* - Phys. Rev. Lett. 1961. V. 7. N 2.
10. *Bloch F.* - Phys. Rev. B. 1970. V. 2. N 1.

Ռ. Մ. Մովսեսյան, Ա. Ս. Սահակյան

Քվանտային սեկտորի միաէլեկտրոնային վիճակները Ահարոնով - Բոմի մագնիսական դաշտում

Հետազոտված են միաէլեկտրոնային վիճակները 2D սեկտորիալ քվանտային փոսում՝ Ահարոնով-Բոմի մագնիսական դաշտի առկայությամբ: Ցույց է տրված, որ էլեկտրոնային էներգետիկ մակարդակները մագնիսական հոսքի պարբերական ֆունկցիաներ են:

R. M. Movsessyan, A. S. Sahakyan

One Electron States of Quantum Sector in Presence of Aharonov-Bohm Magnetic Field

One Electron States in 2D sectorial quantum well in presence of Aharonov-Bohm magnetic field were investigated. It is shown, that one electron energy levels turned to be oscillating functions of magnetic flux.