

Г. З. Геворгян, Р. М. Киракосян

Уравнения и соотношения анизотропных пластин переменной толщины при учете поперечных эффектов

(Представлено академиком С. А. Амбарцумяном 30/XI 2004)

Вопросы уточнения теории пластин постоянной толщины достаточно обстоятельно и полно рассмотрены в [1-6] и др. Эти вопросы для многослойных оболочек переменной жесткости обсуждены в [7] и [8]. В [9] предложен один вариант уравнений и соотношений, учитывающих влияние поперечных сдвигов, нормального напряжения σ_z и обжатия для ортотропных пластин переменной толщины. В настоящей работе приводятся аналогичные уравнения и соотношения для случая, когда материал имеет лишь одну плоскость упругой симметрии, параллельную срединной плоскости пластины. Ради краткости подробности выводов пропущены. Рассмотрен конкретный пример.

1. Рассмотрим прямоугольную пластину переменной толщины $h(x,y)$. Совместим координатную плоскость xOy со срединной плоскостью пластины, направив оси Ox и Oy вдоль сторон пластины, а ось Oz - вертикально вниз. Материал пластины является линейно упругим и имеет лишь одну плоскость упругой симметрии, параллельную срединной плоскости. На пластину действует поверхностная нагрузка, проекции интенсивности которой на координатные оси, приведенные к единице площади срединной плоскости, составляют $X^\pm, Y^\pm, Z^\pm$. Знаками "+" и "-" отмечены величины, относящиеся к поверхностям пластины $z = +h/2$ и $z = -h/2$ соответственно. Условия опирания и нагружения краев пластины произвольны.

В качестве основного допущения для построения простейшей теории, учитывающей влияние поперечных эффектов на расчетные величины рассматриваемой пластины, будем считать, что

$$\tau_{xz} = \varphi_1 + z\varphi_2 + z^2\varphi_3, \quad \tau_{yz} = \psi_1 + z\psi_2 + z^2\psi_3, \quad (1.1)$$

где φ_i, ψ_i - искомые функции координат x, y .

По аналогии с [9] для перемещений и остальных напряжений получим формулы:

$$u_x = u - z \left[\frac{\partial w}{\partial x} - a_{55}\varphi_1 - a_{45}\psi_1 \right], \quad u_y = v - z \left[\frac{\partial w}{\partial y} - a_{44}\psi_1 - a_{45}\varphi_1 \right]; \quad (1.2)$$

$$u_z = w + zw_1 + z^2w_2;$$

$$\sigma_x = B_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + B_{16} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] - A_1 \left[Z_1 + \frac{z}{4} \left[\varphi_2 \frac{\partial h}{\partial x} + \psi_2 \frac{\partial h}{\partial y} \right] \right] -$$

$$\begin{aligned}
& -z \left(B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \alpha_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \beta_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \alpha_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \beta_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right); \\
\sigma_y = & B_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + B_{26} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - A_2 \left[Z_1 + \frac{h}{4} \left(\varphi_2 \frac{\partial h}{\partial x} + \psi_2 \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right] - \\
& -z \left(B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \alpha_3 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \beta_3 \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \alpha_4 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \beta_4 \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right); \\
\tau_{xy} = & B_{16} \frac{\partial u}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial v}{\partial y} + B_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - A_3 \left[Z_1 + \frac{h}{4} \left(\varphi_2 \frac{\partial h}{\partial x} + \psi_2 \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right] - \\
& -z \left(B_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2B_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \alpha_5 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \beta_5 \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \alpha_6 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \beta_6 \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right).
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
w_1 = & A_1 \frac{\partial u}{\partial x} + A_2 \frac{\partial v}{\partial y} + A_3 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \Delta_1 \left[Z_1 + \frac{h}{4} \left(\varphi_2 \frac{\partial h}{\partial x} + \psi_2 \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right]; \\
w_2 = & -\frac{1}{2} \left(A_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2A_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \Delta_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \Delta_3 \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - \Delta_4 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \Delta_5 \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right);
\end{aligned} \tag{1.4}$$

u, v, w - перемещения срединной плоскости по осям x, y, z соответственно. Параметры B_{ij} выражаются через упругие постоянные материала по известным формулам [2].

Приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
Z_1 = (Z^+ - Z^-)/2, \quad A_1 = a_{13}B_{11} + a_{23}B_{12} + a_{36}B_{16}, \quad A_2 = a_{13}B_{12} + a_{23}B_{22} + a_{36}B_{26}, \\
A_3 = a_{13}B_{16} + a_{23}B_{26} + a_{36}B_{66}, \\
\alpha_1 = a_{55}B_{11} + a_{45}B_{16} + A_1, \quad \alpha_2 = a_{55}B_{16} + a_{45}B_{12}, \quad \alpha_3 = a_{55}B_{12} + a_{45}B_{26} + A_2, \\
\alpha_4 = a_{55}B_{26} + a_{45}B_{22}, \quad \alpha_5 = a_{55}B_{16} + a_{45}B_{66} + A_3, \quad \alpha_6 = a_{55}B_{66} + a_{45}B_{26}, \\
\beta_1 = a_{44}B_{16} + a_{45}B_{11}, \quad \beta_2 = a_{44}B_{12} + a_{45}B_{16} + A_1, \quad \beta_3 = a_{44}B_{26} + a_{45}B_{12}, \\
\beta_4 = a_{44}B_{22} + a_{45}B_{26} + A_2, \quad \beta_5 = a_{44}B_{66} + a_{45}B_{16}, \quad \beta_6 = a_{44}B_{26} + a_{45}B_{66} + A_3,
\end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\Delta_1 = a_{13}A_1 + a_{23}A_2 + a_{36}A_3 - a_{33}, \quad \Delta_2 = a_{13}\alpha_1 + a_{23}\alpha_3 + a_{36}\alpha_5 - a_{33},$$

$$\Delta_3 = a_{13}\beta_2 + a_{23}\beta_4 + a_{36}\beta_6 - a_{33}, \quad \Delta_4 = a_{13}\alpha_2 + a_{23}\alpha_4 + a_{36}\alpha_6, \quad \Delta_5 = a_{13}\beta_1 + a_{23}\beta_3 + a_{36}\beta_5.$$

С помощью поверхностных условий пластины функции $\varphi_2, \psi_2, \varphi_3, \psi_3$ выражаются через $u, v, w, \varphi_1, \psi_1$. Подставляя эти выражения в формулы напряжений и производя соответствующие интегрирования по толщине пластины, для усилий и моментов пластины получим:

$$\begin{aligned} T_x &= h \left[\alpha_7 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_7 \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda_1 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \alpha A_1 \left(X_2 \frac{\partial h}{\partial x} + Y_2 \frac{\partial h}{\partial y} + 4Z_1 \right) \right]; \\ T_y &= h \left[\alpha_8 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_8 \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda_2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \alpha A_2 \left(X_2 \frac{\partial h}{\partial x} + Y_2 \frac{\partial h}{\partial y} + 4Z_1 \right) \right]; \\ S_{xy} &= h \left[\alpha_9 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_9 \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda_3 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \alpha A_3 \left(X_2 \frac{\partial h}{\partial x} + Y_2 \frac{\partial h}{\partial y} + 4Z_1 \right) \right]; \\ M_x &= -\frac{h^3}{12} \left(B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \alpha_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \alpha_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \beta_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \beta_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right); \\ M_y &= -\frac{h^3}{12} \left(B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \alpha_3 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \alpha_4 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \beta_3 \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \beta_4 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right); \\ M_{xy} &= -\frac{h^3}{12} \left(B_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2B_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \alpha_5 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \alpha_6 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \beta_5 \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \beta_6 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right); \\ N_x &= \frac{h}{3} (X_1 + 2\varphi_1) + \frac{1}{h} \left(M_x \frac{\partial h}{\partial x} + M_{xy} \frac{\partial h}{\partial y} \right); \\ N_y &= \frac{h}{3} (Y_1 + 2\psi_1) + \frac{1}{h} \left(M_{xy} \frac{\partial h}{\partial x} + M_y \frac{\partial h}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \alpha_7 &= B_{11} - \alpha A_1 \delta_1, \quad \beta_7 = B_{12} - \alpha A_1 \delta_2, \quad \lambda_1 = B_{16} - \alpha A_1 \delta_3, \\ \alpha_8 &= B_{12} - \alpha A_2 \delta_1, \quad \beta_8 = B_{22} - \alpha A_2 \delta_2, \quad \lambda_2 = B_{26} - \alpha A_2 \delta_3, \\ \alpha_9 &= B_{16} - \alpha A_3 \delta_1, \quad \beta_9 = B_{26} - \alpha A_3 \delta_2, \quad \lambda_3 = B_{66} - \alpha A_3 \delta_3, \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\delta_1 = B_{11} \left[\frac{\partial h}{\partial x} \right]^2 + 2B_{16} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} + B_{12} \left[\frac{\partial h}{\partial y} \right]^2, \quad \delta_2 = B_{12} \left[\frac{\partial h}{\partial x} \right]^2 + 2B_{26} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} + B_{22} \left[\frac{\partial h}{\partial y} \right]^2,$$

$$\delta_3 = B_{16} \left[\frac{\partial h}{\partial x} \right]^2 + 2B_{66} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} + B_{26} \left[\frac{\partial h}{\partial y} \right]^2, \quad \alpha = \left[4 + A_1 \left[\frac{\partial h}{\partial x} \right]^2 + A_2 \left[\frac{\partial h}{\partial y} \right]^2 + 2A_3 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} \right]^{-1},$$

$$X_1 = (X^+ - X^-)/2, \quad Y_1 = (Y^+ - Y^-)/2, \quad X_2 = X^+ + X^-, \quad Y_2 = Y^+ + Y^-, \quad Z_2 = Z^+ + Z^-.$$

Подставив (1.6) в уравнения равновесия дифференциального элемента срединной плоскости пластины [2], после некоторых преобразований получим системы разрешающих уравнений плоской задачи и задачи изгиба.

а) Система уравнений плоской задачи

$$\begin{aligned} & h \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\alpha_7 + \lambda_1) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \lambda_3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\beta_7 + \lambda_3) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \beta_9 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \\ & + \left[\frac{\partial(\alpha_7 h)}{\partial x} + \frac{\partial(\alpha_9 h)}{\partial y} \right] \frac{\partial u}{\partial x} + \left[\frac{\partial(\beta_7 h)}{\partial x} + \frac{\partial(\beta_9 h)}{\partial y} \right] \frac{\partial v}{\partial y} + \left[\frac{\partial(\lambda_1 h)}{\partial x} + \frac{\partial(\lambda_3 h)}{\partial y} \right] \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \\ & = -X_2 + A_1 \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha h \left(X_2 \frac{\partial h}{\partial x} + Y_2 \frac{\partial h}{\partial y} + 4Z_1 \right) \right] + A_3 \frac{\partial}{\partial y} \left[\alpha h \left(X_2 \frac{\partial h}{\partial x} + Y_2 \frac{\partial h}{\partial y} + 4Z_1 \right) \right]; \\ & h \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\alpha_8 + \lambda_3) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \lambda_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda_3 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\beta_9 + \lambda_2) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \beta_8 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \\ & + \left[\frac{\partial(\alpha_8 h)}{\partial x} + \frac{\partial(\alpha_9 h)}{\partial y} \right] \frac{\partial u}{\partial x} + \left[\frac{\partial(\beta_8 h)}{\partial x} + \frac{\partial(\beta_9 h)}{\partial y} \right] \frac{\partial v}{\partial y} + \left[\frac{\partial(\lambda_3 h)}{\partial x} + \frac{\partial(\lambda_2 h)}{\partial y} \right] \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \\ & = -Y_2 + A_3 \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha h \left(X_2 \frac{\partial h}{\partial x} + Y_2 \frac{\partial h}{\partial y} + 4Z_1 \right) \right] + A_2 \frac{\partial}{\partial y} \left[\alpha h \left(X_2 \frac{\partial h}{\partial x} + Y_2 \frac{\partial h}{\partial y} + 4Z_1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.8)$$

б) Система уравнений задачи изгиба

$$\begin{aligned} & h^2 \left[\left(B_{11} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + B_{12} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(B_{12} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \\ & + 2 \left(B_{16} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + 2B_{66} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left. \right] - h \left\{ \left[8 + h \left(\alpha_1 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + 2\alpha_5 \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + \alpha_3 \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) \right] \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + h \left[\left(\alpha_2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + 2\alpha_6 \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + \alpha_4 \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \left(\beta_1 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + 2\beta_5 \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + \beta_3 \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right] + \\
& + \left[8 + h \left(\beta_2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + 2\beta_6 \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + \beta_4 \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) \right] \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - 16 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \varphi_1 + \frac{\partial h}{\partial y} \psi_1 \right) = \\
& = 4 \left[3Z_2 + h \left(\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_1}{\partial y} \right) - X_1 \frac{\partial h}{\partial x} - Y_1 \frac{\partial h}{\partial y} \right]; \\
& h^2 \left[B_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + 3B_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + B_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \alpha_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} - (\alpha_2 + \alpha_5) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} - \right. \\
& - \alpha_6 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} - \beta_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} - (\beta_2 + \beta_5) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} - \beta_6 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} \left. \right] + 2h \left[\left(B_{11} \frac{\partial h}{\partial x} + B_{16} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \right. \\
& + 2 \left(B_{16} \frac{\partial h}{\partial x} + B_{66} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \left(B_{12} \frac{\partial h}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\alpha_1 \frac{\partial h}{\partial x} + \alpha_5 \frac{\partial h}{\partial y} \right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \\
& - \left(\alpha_2 \frac{\partial h}{\partial x} + \alpha_6 \frac{\partial h}{\partial y} \right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \left(\beta_1 \frac{\partial h}{\partial x} + \beta_5 \frac{\partial h}{\partial y} \right) \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \left(\beta_2 \frac{\partial h}{\partial x} + \beta_6 \frac{\partial h}{\partial y} \right) \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \left. \right] + 8\varphi_1 = 8X_1; \quad (1.9) \\
& h^2 \left[B_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 3B_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + B_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \alpha_5 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} - (\alpha_3 + \alpha_6) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} - \right. \\
& - \alpha_4 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} - \beta_5 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} - (\beta_3 + \beta_6) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} - \beta_4 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} \left. \right] + 2h \left[\left(B_{16} \frac{\partial h}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \right. \\
& + 2 \left(B_{66} \frac{\partial h}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \left(B_{26} \frac{\partial h}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\alpha_5 \frac{\partial h}{\partial x} + \alpha_3 \frac{\partial h}{\partial y} \right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \\
& - \left(\alpha_6 \frac{\partial h}{\partial x} + \alpha_4 \frac{\partial h}{\partial y} \right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \left(\beta_5 \frac{\partial h}{\partial x} + \beta_3 \frac{\partial h}{\partial y} \right) \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \left(\beta_6 \frac{\partial h}{\partial x} + \beta_4 \frac{\partial h}{\partial y} \right) \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \left. \right] + 8\psi_1 = 8Y_1.
\end{aligned}$$

2. Система уравнений плоской задачи (1.8) имеет четвертый порядок, а система уравнений

задачи изгиба (1.9) - шестой. В соответствии с этим на каждой стороне края пластины необходимо ставить по пять условий: по два условия для плоской задачи, по три - для задачи изгиба. Эти условия можно сформулировать с помощью выражений перемещений, усилий и моментов пластины.

Ради краткости приведем только условия шарнирного опирания вдоль линий $x = 0, z = z_0$, где $-h/2 \leq z_0 \leq h/2$:

(плоская задача)

$$\begin{aligned} \alpha_7 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_7 \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda_1 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \alpha A_1 \left(X_2 \frac{\partial h}{\partial x} + Y_2 \frac{\partial h}{\partial y} + 4Z_1 \right) &= 0, \quad (T_x = 0), \\ \alpha_9 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_9 \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda_3 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \alpha A_3 \left(X_2 \frac{\partial h}{\partial x} + Y_2 \frac{\partial h}{\partial y} + 4Z_1 \right) &= 0, \quad (S_{xy} = 0); \end{aligned} \quad (2.1)$$

(задача изгиба)

$$\begin{aligned} B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \alpha_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \alpha_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \beta_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \beta_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial y} &= 0, \quad (M_x = 0), \\ B_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2B_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \alpha_5 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \alpha_6 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \beta_5 \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \beta_6 \frac{\partial \psi_1}{\partial y} &= 0, \quad (M_{xy} = 0), \\ w + z_0 w_1 + z_0^2 w_2 &= 0, \quad (u_z(0, z_0) = 0). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Аналогичным образом можно сформулировать и остальные краевые условия. Нетрудно заметить, что как разрешающие уравнения (1.8), так и граничные условия (2.1) не содержат величин изгибного характера. В силу этого плоскую задачу можно решать отдельно, независимо от задачи изгиба. Если ограничиться точностью порядка h^2/l^2 , где l - характерный размер пластины в плане, и из выражения u_z отбросить член zw_1 , вносящий в задачу изгиба поправку порядка h^4/l^4 , то тогда задача изгиба также становится самостоятельной и ее можно решать отдельно.

Таким образом, определение напряженно-деформированного состояния пластины переменной толщины, которая имеет одну плоскость упругой симметрии, параллельную срединной плоскости, при учете поперечных сдвигов, нормального напряжения σ_z и обжатия сводится к нахождению пяти функций $u, v, w, \varphi_1, \psi_1$. Для этого необходимо проинтегрировать уравнения плоской задачи (1.8) и задачи изгиба (1.9) при соответствующих краевых условиях.

3. Для касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} окончательно получим:

$$\begin{aligned} \tau_{xz} = & \frac{12z^2 - h^2}{2h^2} X_1 + \frac{z}{h} X_2 + \frac{z}{h^2} \left(T_x \frac{\partial h}{\partial x} + S_{xy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{SN_x}{J} + \\ & + \frac{h}{4J} \left(1 - \frac{Sh}{J} \right) \left(M_x \frac{\partial h}{\partial x} + M_{xy} \frac{\partial h}{\partial y} \right); \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \tau_{yz} = & \frac{12z^2 - h^2}{2h^2} Y_1 + \frac{z}{h} Y_2 + \frac{z}{h^2} \left(T_y \frac{\partial h}{\partial x} + S_{xy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{SN_y}{J} + \\ & - \frac{h}{4J} \left(1 - \frac{Sh}{J} \right) \left(M_y \frac{\partial h}{\partial x} + M_{xy} \frac{\partial h}{\partial y} \right), \quad S = \frac{h^2 - 4z^2}{8}, \quad J = \frac{h^2}{12}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Эти формулы совпадают с аналогичными формулами, соответствующими классической теории пластин переменной толщины. Учет поперечных сдвигов и обжатия может сказываться только на значениях внутренних усилий и моментов. Выражения же поперечных касательных напряжений через силовые факторы пластины остаются без изменений.

4. Рассмотрим длинную прямоугольную пластинку, толщина которой по длине не изменяется, а по ширине изменяется линейно. Пластинка свободно оперта вдоль длинных и произвольно закреплена вдоль коротких сторон. Она несет равномерно распределенную поверхностную нагрузку, перпендикулярную срединной плоскости. Материал пластинки в любой точке имеет одну плоскость упругой симметрии, параллельную срединной плоскости. Очевидно, что на участке, достаточно удаленном от коротких краев, изогнутую срединную поверхность пластинки можно считать практически цилиндрической. Ось Оу направим вдоль одной из длинных сторон. Пусть

$$h = h_0 + h_1 x, \quad Z^+ = 0, \quad Z^- = q, \quad (Z_1 = -q/2, \quad Z_2 = q). \quad (4.1)$$

Здесь $h_0 > 0$, $h_1 > h_0/l$ - заданные постоянные, l - ширина пластинки. Ограничиваясь точностью порядка h^2/l^2 , рассмотрим только задачу изгиба, считая, что линии опирания лежат на срединной плоскости. Перейдем к безразмерным величинам:

$$\bar{x} = x/l, \quad \bar{z} = z/h, \quad s = h_0/l, \quad \gamma = h_1/s, \quad (4.2)$$

$$H = h/h_0 = 1 + \gamma x, \quad \bar{a}_{ij} = a_{ij}/a_{11}, \quad \bar{B}_{ij} = B_{ij}/B_{11},$$

$$\bar{\varphi} = \frac{\varphi_1}{q}, \quad \bar{\psi}_1 = \frac{\psi_1}{q}, \quad \bar{w} = \frac{wB_{11}}{qh_0}, \quad \bar{N}_x = \frac{N_x}{qh_0}, \quad \bar{N}_y = \frac{N_y}{qh_0}$$

$$\overline{M}_x = \frac{M_x}{qh_0^2}, \quad \overline{M}_y = \frac{M_y}{qh_0^2}, \quad \overline{M}_{xy} = \frac{M_{xy}}{qh_0^2}.$$

В силу статической определимости с учетом (4.1) и (4.2) имеем

$$\overline{N}_x = \frac{1-2\overline{x}}{2s}, \quad \overline{\varphi} = \frac{3(1-2\overline{x}-\gamma\overline{x}^2)}{4sH^2}, \quad \overline{M}_x = \frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{2s^2}. \quad (4.3)$$

С учетом (1.6), (1.9), (4.1) и (4.2) задача сводится к интегрированию системы

$$\begin{aligned} s \frac{d^2 \overline{w}}{d\overline{x}^2} - \beta_1 \frac{d\overline{\psi}_1}{d\overline{x}} &= -\frac{3[\alpha_1 s^2(1+\gamma) + 4\overline{x}(1-\overline{x})]}{2s^3 H^3}, \\ \frac{d}{d\overline{x}} \left[H^2 \left(s \overline{B}_{16} \frac{d^2 \overline{w}}{d\overline{x}^2} - \beta_5 \frac{d\overline{\psi}_1}{d\overline{x}} \right) \right] + \frac{8\overline{\psi}_1}{s^2} &= -\frac{3\alpha_5 \gamma (1+\gamma)}{2s H^2} \end{aligned} \quad (4.4)$$

при краевых условиях

$$\left(s \overline{B}_{16} \frac{d^2 \overline{w}}{d\overline{x}^2} - \alpha_5 \frac{d\overline{\varphi}}{d\overline{x}} - \beta_5 \frac{d\overline{\psi}_1}{d\overline{x}} \right) \bigg|_{\overline{x}=0}^{\overline{x}=1} = 0, \quad \overline{w} = \bigg|_{\overline{x}=0}^{\overline{x}=1} = 0. \quad (4.5)$$

Пусть:

$$\overline{a}_{12} = -0.4; \quad \overline{a}_{13} = -0.3; \quad \overline{a}_{16} = -0.2; \quad \overline{a}_{22} = 3; \quad \overline{a}_{23} = -0.1; \quad \overline{a}_{26} = -0.25,$$

$$\overline{a}_{33} = 10; \quad \overline{a}_{36} = -0.35; \quad \overline{a}_{44} = 8; \quad \overline{a}_{45} = -5; \quad \overline{a}_{66} = 6; \quad \overline{a}_{55} = 7; \quad s = 0.1. \quad (4.6)$$

$\gamma = 1$					$\gamma = 2$				
$\bar{x}$	$\bar{w}$	$\bar{N}_y$	$\bar{M}_y$	$\bar{M}_{xy}$	$\bar{x}$	$\bar{w}$	$\bar{N}_y$	$\bar{M}_y$	$\bar{M}_{xy}$
0	0	0.6811	0.0083	0	0	0	0.8840	0.013	0
0.1	237.3	0.2056	0.6387	0.3635	0.1	145.0	0.2371	0.6501	0.4511
0.2	422.0	0.1232	1.119	0.5205	0.2	244.6	0.1302	1.131	0.6241
0.3	540.7	0.0789	1.460	0.6207	0.3	298.7	0.0808	1.473	0.7283
0.4	593.3	0.0391	1.665	0.6796	0.399	314.7	0.0396	1.677	0.7876
0.437	597.3	0.0246	1.706	0.6914	0.4	314.7	0.0392	1.678	0.7880
0.5	586.4	-0.0002	1.733	0.6991	0.5	300.8	-0.0014	1.747	0.8070
0.6	529.0	-0.0401	1.665	0.6791	0.6	264.2	-0.0447	1.678	0.7842
0.7	431.7	-0.0827	1.460	0.6181	0.7	211.1	-0.0950	1.472	0.7153
0.8	304.5	-0.1368	1.118	0.5100	0.8	146.7	-0.1645	1.128	0.5880
0.9	157.5	-0.2324	0.6360	0.3313	0.9	75.17	-0.2781	0.6433	0.3717
1	0	-0.4698	0.0084	0	1	0	-0.4888	0.0129	0

Система решается путем разложения в усеченный степенной ряд степени n функций $\bar{w}$ и $\bar{\psi}_1$. В качестве узловых точек взяты корни смещенных многочленов Чебышева $T_{n-2}^* = T_{n-2}(2x-1)$. В узловых точках удовлетворяются уравнения (4.4), а в точках 0 и 1 - краевые условия (4.5). Вычисления показывают, что при $n \geq 18$ значения всех расчетных величин совпадают с точностью четырех значащих цифр, т.е. с точностью порядка 0.1%. В таблице представлены значения $\bar{w}$, $\bar{N}_y$, $\bar{M}_y$, $\bar{M}_{xy}$ при $n = 18$ для $\gamma = 1$ и $\gamma = 2$ в равноотстоящих точках и в точках, где $\bar{w}$ достигает максимума. Как и следовало ожидать, в отличие от случая ортотропной пластинки, в данном случае $\bar{N}_y$ и $\bar{M}_{xy}$ отличны от нуля. Причем момент $\bar{M}_{xy}$ всюду не отрицателен и максимальное значение принимает при $\bar{x} = 0.5$. Поперечная же сила $\bar{N}_y$ знакопеременна и в сечении $\bar{x} = 0.5$ равна нулю. Причем его интеграл по ширине пластинки для обоих значений γ равен нулю.

Институт механики НАН РА

Литература

1. *Reissner E.* - Trans. ASME. 1945. V. 67. P. A69-A77.
2. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. М. Наука. 1987. 360 с.
3. *Власов Б. Ф.* - Вестник МГУ. 1957. №3. С. 42-51.
4. *Хачатурян Т. Т.* - Изв. АН Арм ССР. С. физ-мат. наук. 1961. Т. 14. №1. С. 67-78.
5. *Васильев В. В.* - Изв. РАН. МТТ. 1998. №3. С. 46-58.
6. *Алфутов Н. А.* - Изв. РАН. МТТ. 1992. №3. С. 65-72.

7. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Теория оболочек переменной жесткости. Киев. Наукова Думка. 1981. 544 с.

8. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. В сб: Проблемы механики тонких деформируемых тел. Ереван. 2002. С. 155-166.

9. Киракосян Р. М. - Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т. 55. №4. С. 12-23.

Գ. Զ. Գևորգյան, Ռ. Մ. Կիրակոսյան

**Փոփոխական հաստության անիզոտրոպ սալերի հավասարումները և առնչությունները
ընդլայնական էֆեկտների հաշվառմամբ**

Բերվում են առաձգական սիմետրիայի մեկ հարթություն ունեցող փոփոխական հաստության անիզոտրոպ սալերի հիմնական հավասարումները և առնչությունները, որոնք հաշվի են առնում ընդլայնական սահքերի, σ_z նորմալ լարման և ընդլայնական սեղմման ազդեցությունները հաշվային մեծությունների վրա: Դրանք ստացվել են [9] աշխատանքում օգտագործված եղանակով:

G. Z. Gevorgyan, R. M. Kirakosyan

**Equations and Relations of Anisotrope Plates of Variable Thickness Taking into
Account the Transversal Effects**

Main equations and relations of anisotropic plates of variable thickness with a single plain of symmetry are presented in this article. Those equations and relations take into account the influences of transversal sheers, normal stress σ_z and transversal compression on resulting values of calculated quantities. They are obtained by the method used in [9].