

В. Р. Барсегян

Задача приоритетного оптимального управления движением и управляемость линейных систем

(Представлено академиком Ю. Г. Шукурзяном 17/II 2005)

Рассматриваются задача приоритетного оптимального управления движением несколькими управляющими воздействиями и управляемость линейных систем. Приведены условия вполне управляемости нестационарной и стационарной систем. Показано, что отдельно по каждому управляющему воздействию система может быть не вполне управляемой, однако в совокупности этих управляющих воздействий такая система может стать вполне управляемой. Для решения задачи приоритетного оптимального управления движением после построения оптимальных управляющих воздействий проводится минимизация критерия качества по параметрам, характеризующим приоритетность управляющих воздействий.

1. Рассмотрим следующую линейную систему:

$$\dot{x} = A(t)x + \sum_{i=1}^k \alpha_i B^{(i)}(t)u^{(i)}, \quad (1.1)$$

где $x \in R^n$, $A(t) - (n \times n)$, $B^{(i)}(t) - (n \times r_i)$ -мерные матрицы, элементы которых измеримые ограниченные функции, $u^{(i)} - r_i$ -мерные вектор-столбцы управляющих воздействий (i -ый управляющий орган). Предполагается, что управляющие воздействия $u^{(i)} \in P_i \subset R^{r_i}$, где P_i ($i = 1, 2, \dots, k$) - замкнутые ограниченные множества, а параметры $\alpha_i \in [0, 1]$ характеризуют i -ый орган управления ($u^{(i)}$) и являются коэффициентами его приоритетности.

Определение. Систему (1.1) назовем вполне управляемой на отрезке времени $[t_0, t_1]$, если из совокупности $\{u^{(1)}, \dots, u^{(k)}\}$ управлений могут быть найдены такие управления, под воздействием которых систему (1.1) можно перевести из любого начального положения $x(t_0)$ в любое конечное положение $x(t_1)$.

Для исследования управляемости системы (1.1) целесообразно ввести следующие обозначения:

$$B(t, \alpha) = (\alpha_1 B^{(1)}(t), \dots, \alpha_k B^{(k)}(t)), \quad U = \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ \vdots \\ u^{(k)} \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Здесь матрица $B(t, \alpha)$ имеет размерность $(n \times m)$, $m = \sum_{i=1}^k r_i$, через α обозначена совокупность параметров $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, размерность вектор-столбца U равна m .

С учетом введенных обозначений уравнение (1.1) примет следующий вид:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t, \alpha)U. \quad (1.3)$$

Предположим, что элементы матриц $A(t)$ и $B(t, \alpha)$ имеют непрерывные производные по t соответственно вплоть до $(n - 2)$ -ого и $(n - 1)$ -ого порядка по крайней мере в окрестности некоторой точки $t = t_*$ из отрезка $[t_0, t_1]$, и в окрестности точки t_* введем матрицы $L_k(t, \alpha)$ следующими рекуррентными соотношениями:

$$L_1(t, \alpha) = B(t, \alpha), \quad L_j(t, \alpha) = A(t)L_{j-1}(t, \alpha) - \frac{dL_{j-1}(t, \alpha)}{dt} \quad (j = 2, \dots, n). \quad (1.4)$$

Согласно [1] имеет место следующая теорема о достаточном условии полной управляемости для нестационарной системы (1.3).

Теорема 1. Пусть на отрезке $[t_0, t_1]$ существует точка $t = t_*$, в которой ранг матрицы

$$K(t, \alpha) = \{L_1(t, \alpha), \dots, L_n(t, \alpha)\} \quad (1.5)$$

равен n . Тогда система (1.3) вполне управляема на отрезке $[t_0, t_1]$.

Если система (1.3) стационарна, т.е.

$$\dot{x} = Ax + B(\alpha)U, \quad (1.6)$$

то матрица $K(t, \alpha)$, имеющая вид (1.5), согласно (1.4) приобретет следующий простой вид:

$$K(\alpha) = \{B(\alpha), AB(\alpha), \dots, A^{n-1}B(\alpha)\}. \quad (1.7)$$

Теорема 2. Для того чтобы стационарная система (1.6) была вполне управляемой на любом отрезке $[t_0, t_1]$, необходимо и достаточно, чтобы матрица управляемости $K(\alpha)$ (1.7) имела ранг равный n .

Доказательство этих теорем аналогично доказательству теорем в [1].

Необходимо отметить, что при наличии возможности управления системой несколькими управляющими органами $u^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, k$) свойство полной управляемости приобретает особое значение. Так, в задачах приоритетного выбора управления, например, при двух управляющих органах, возможно, что система будет вполне управляемой по одному управляющему органу, а по другому - не вполне управляемой. Или отдельно по каждому управляющему органу система может быть не вполне управляемой, однако в совокупности этих двух управляющих органов такая система может стать вполне управляемой.

Рассмотрим следующую стационарную систему:

$$\dot{x} = Ax + \alpha_1 b^{(1)} u^{(1)} + \alpha_2 b^{(2)} u^{(2)}, \quad (1.8)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad b^{(1)} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \end{pmatrix}, \quad b^{(2)} = \begin{pmatrix} b_1^{(2)} \\ b_2^{(2)} \end{pmatrix}.$$

По каждому управляющему органу (по управлениям $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$, при $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$) матрицы управляемости имеют вид

$$K_i(\alpha_i) = \begin{pmatrix} \alpha_i b_1^{(i)} & \alpha_i (a_{11} b_1^{(i)} + a_{12} b_2^{(i)}) \\ \alpha_i b_2^{(i)} & \alpha_i (a_{21} b_1^{(i)} + a_{22} b_2^{(i)}) \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2),$$

а по совокупности обоих управляющих органов матрица управляемости будет

$$K(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{pmatrix} \alpha_1 b_1^{(1)} & \alpha_2 b_1^{(2)} & \alpha_1 (a_{11} b_1^{(1)} + a_{12} b_2^{(1)}) & \alpha_2 (a_{11} b_1^{(2)} + a_{12} b_2^{(2)}) \\ \alpha_1 b_2^{(1)} & \alpha_2 b_2^{(2)} & \alpha_1 (a_{21} b_1^{(1)} + a_{22} b_2^{(1)}) & \alpha_2 (a_{21} b_1^{(2)} + a_{22} b_2^{(2)}) \end{pmatrix}.$$

Чтобы система (1.8) по каждому управляющему органу была не вполне управляемой, а по совокупности обоих органов была вполне управляемой, параметры этой системы должны удовлетворять следующим условиям:

$$\text{rang } K_i(\alpha_i) \neq 2, \quad (i = 1, 2), \quad \text{rang } K(\alpha_1, \alpha_2) = 2. \quad (1.9)$$

В частности для системы (1.8) справедлива следующая лемма.

Лемма. Пусть выполнены следующие условия: $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = a_{21}$, $a_{11} + a_{21} \neq 0$, $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$, $b_1^{(1)} = -b_2^{(1)} \neq 0$, $b_1^{(2)} = b_2^{(2)} \neq 0$. Тогда система (1.8) по отдельным управлениям $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ не вполне управляема, а по совокупности управлений $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ вполне управляема.

Доказательство леммы проводится непосредственной проверкой условий (1.9).

Примером такой системы является:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_2 + \alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + x_2 + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \end{cases},$$

для которой матрицы управляемости имеют следующий вид:

$$K_1(\alpha_1) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 3\alpha_1 \\ \alpha_1 & 3\alpha_1 \end{pmatrix}, \quad K_2(\alpha_2) = \begin{pmatrix} -\alpha_2 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & -\alpha_2 \end{pmatrix}, \quad K(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\alpha_2 & 3\alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 3\alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

2. Задачу приоритетного выбора оптимального управления движением сформулируем следующим образом [2].

Требуется найти оптимальные управляющие воздействия $u^{(i)}$ на отрезке времени $[t_0, t_1]$ и параметры $\alpha_i \in [0, 1]$ ($i = 1, 2, \dots, k$), с помощью которых система (1.1) переводится из заданного начального положения $x(t_0)$ в заданное конечное положение $x(t_1)$ и доставляет функционалу

$$\chi[u_1, \dots, u_k] = \left(\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^k \|u^{(i)}\|^2 dt \right)^{1/2} = \left(\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^{r_i} (u_j^{(i)})^2 \right) dt \right)^{1/2} \quad (2.1)$$

наименьшее возможное значение.

Для решения этой задачи, записывая формулу Коши для системы (1.1) (или системы (1.3)) и учитывая начальное и конечное значения фазового вектора, получим следующее интегральное соотношение:

$$\int_{t_0}^{t_1} H[t_1, \tau, \alpha] U d\tau = C, \quad (2.2)$$

где матрица $H[t_1, \tau, \alpha] = X[t_1, \tau] B(\tau, \alpha) = X[t_1, \tau] \sum_{i=1}^k \alpha_i B^{(i)}(\tau)$, $X[t_1, \tau]$ - фундаментальная матрица

решений однородной части системы (1.1), а

$$C = x(t_1) - X[t_1, t_0]x(t_0). \quad (2.3)$$

Элементы матрицы $H[t_1, \tau, \alpha]$ линейно зависят от параметров α_i ($i = 1, 2, \dots, k$).

Учитывая введенные обозначения (1.2), функционал (2.1) можно записать так:

$$\chi[U] = \left(\int_{t_0}^{t_1} \|U\|^2 dt \right)^{1/2} = \left(\int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{j=1}^m U_j^2 \right) dt \right)^{1/2}. \quad (2.4)$$

Рассматривая задачу отыскания минимума (2.4) с условием (2.2) как проблему моментов [1], вычислим

$$\rho_0^2(\alpha) = \min_n \sum_{\substack{i,j=1 \\ \sum_i l_i c_i = 1}}^n \beta_{ij}(\alpha) l_i l_j, \quad (2.5)$$

где

$$\beta_{ij}(\alpha) = \sum_{v=1}^m \int_{t_0}^{t_1} h_v^{(i)}[t_1, \tau, \alpha] h_v^{(j)}[t_1, \tau, \alpha] dt \quad (i, j = 1, \dots, n),$$

$h^{(i)}[t_1, \tau, \alpha]$ - вектор-строка матрицы $H[t_1, \tau, \alpha]$.

Используя метод неопределенных множителей Лагранжа, относительно неизвестных $l_1, \dots, l_n, \lambda$, будем иметь систему алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^n \beta_{ij}(\alpha) l_j = -\lambda c_i, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.6)$$

с условием $\sum_{i=1}^n l_i c_i = 1$.

Решение этой системы представится в виде

$$l_i^0(\alpha) = \frac{\Delta_i(\alpha)}{\sum_{j=1}^n c_j \Delta_j(\alpha)},$$

где определители $\Delta_i(\alpha)$ получаются из главного определителя $\det\{\beta_{ij}(\alpha)\}$ системы (2.6) заменой i -ого столбца вектор-столбцом C (2.3).

Имея $l_i^0(\alpha)$, из (2.5) получим

$$\rho_0^2(\alpha) = \sum_{i,j=1}^n \beta_{ij}(\alpha) l_i^0(\alpha) l_j^0(\alpha).$$

Оптимальные управляющие воздействия будут

$$U_j^0(t, \alpha) = \frac{1}{\rho_0^2(\alpha)} h_j(t, \alpha) \quad (j = 1, \dots, m), \quad \text{где} \quad h_j(t, \alpha) = \sum_{i=1}^n l_i^0(\alpha) h_{ij}(t_1, t, \alpha).$$

Минимальное значение функционала (2.4) зависит от параметров $\alpha_i \in [0, 1]$

$$\chi^2[U^0(\alpha)] = \frac{1}{\rho_0^2(\alpha)} = \chi^2[u^{(1)0}(\alpha_1, \dots, \alpha_k), \dots, u^{(k)0}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)]. \quad (2.7)$$

С помощью выбора подходящего коэффициента приоритетности органов управления α_i ($i = 1, 2, \dots, k$) можно обеспечить более минимальное значение для выражения (2.7), т.е.

$$\begin{aligned} \chi^2[u^{(1)0}(\alpha_1^0, \dots, \alpha_k^0), \dots, u^{(k)0}(\alpha_1^0, \dots, \alpha_k^0)] = \\ = \min_{\alpha_i \in [0, 1]} \chi^2[u^{(1)0}(\alpha_1, \dots, \alpha_k), \dots, u^{(k)0}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)] \quad (i = 1, \dots, k). \end{aligned}$$

Найденные значения $\alpha_1^0, \dots, \alpha_k^0$ соответствуют приоритетным оптимальным управляющим воздействиям $u^{(i)0}(t, \alpha_1^0, \dots, \alpha_k^0)$, ($i = 1, \dots, k$).

Ереванский государственный университет

Литература

1. *Красовский Н. Н.* - Теория управления движением. М. Наука. 1968. 476 с.
2. *Габриелян М. С., Барсегян В. Р.* - Тезисы докладов. 8-го междунар. семинара памяти Е. С. Пятницкого. М. 2004. С. 36-37

Վ. Ռ. Բարսեղյան

**Գծային համակարգերի շարժման, ըստ կարևորության, դեկավարելիությունը և
օպտիմալ դեկավարումը**

Ուսումնասիրված է մի քանի դեկավարող ազդեցություններով, որոնցից յուրաքանչյուրն ունի իր բնութագրիչ պարամետրը, գծային համակարգի դեկավարելիությունը և նրա շարժման, ըստ կարևորության, օպտիմալ դեկավարման խնդիրը: Բերված են ոչ ստացիոնար և ստացիոնար համակարգերի լրիվ դեկավարելիության պայմանները: Ցույց է տրված, որ, ըստ առանձին դեկավարումների, համակարգը կարող է լինել ոչ լրիվ դեկավարելի, իսկ նրանց համախմբությամբ՝ լրիվ դեկավարելի: Օպտիմալ դեկավարման խնդրի լուծման համար օպտիմալ դեկավարող ազդեցությունների կառուցումից հետո որակի հայտանիշի հաջորդ մինիմալացումը կատարվում է դեկավարումների կարևորությունը բնութագրող պարամետրերի ընտրությամբ:

V. R. Barseghyan

**The Problem of the Prior Optimal Control of the Movement and Controlability of the
Linear Systems**

In this paper the problem of the prior optimal control of the movement of the several controlling influences and controlability of the linear systems are considered. Complete controlling conditions of the nonstationary and stationary systems are given. It is shown that the system can be incompletely controlable due to each controlling influence, but due to their unity they can be completely controlable. For the solving problem of the prior optimal control of the movement, after building optimal controlling influences, the minimization of the quality criteria is done by the parameters, characterizing the priority of the controlling influences.