УДК 517.9

В. А. Яврян

Об обратной задаче Штурма - Лиувилля на конечном интервале

(Представлено академиком Н. У. Аракеляном 25/II 2005)

1. В пространстве $L_2(0,\pi)$ рассмотрим краевую задачу

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in (0,\pi) \tag{1}$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \tag{2}$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \tag{3}$$

где $q \in L_p(0,\pi)$, $(p = 1;2)$, h, H - вещественные числа, λ - комплексное число.

Обозначим через $\varphi(x,\lambda)$ решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$\varphi(0,\lambda) = 1, \quad \varphi'(0,\lambda) = h.$$

Пусть $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ - собственные значения задачи (1)-(3) (иногда их будем обозначать более подробно $\lambda_n(q,h,H)$, $n = 0,1,\dots$) и

$$\rho_n = \rho_n(q,h,H) = \left(\int_0^\pi \varphi^2(x,\lambda_n)dx \right)^{-1}.$$

Задача восстановления краевой задачи (1)-(3) по двум последовательностям $\{\lambda_n\}_0^\infty$ и $\{\rho_n\}_0^\infty$ как частный случай обратной задачи по спектральной функции решена в известной работе И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана [1]. Она подробно изложена в монографиях [2,3] и обзорной статье [4].

В работах [5,6] условия на $\{\lambda_n\}_0^\infty$ и $\{\rho_n\}_0^\infty$ в классе $q \in L_2(0,\pi)$ даны в более явной форме. В этой статье, развивая метод Гельфанда - Левитана, обобщаются результаты [5,6] для более естественного класса $q \in L_1(0,\pi)$.

Лемма 1. *Равномерно для* $x \in [0,\pi]$ *имеем:*

$$\varphi(x,\lambda) = \cos sx + O\left(\frac{e^{tx}}{s}\right), \tag{4}$$

$$\varphi'(x,\lambda) = -s \sin sx + O(e^{tx}), \tag{5}$$

где $s = \sqrt{\lambda}$, $t = \operatorname{Im} s \geq 0$.

Существуют такие функции $f,g,h \in L_p(0,\pi)$, $(p = 1;2)$, *что для* $n > 0$ *имеем*

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{c}{\pi n} + \frac{1}{n}\int_0^\pi f(t)\cos nt\,dt, \tag{6}$$

$$\rho_n = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^\pi g(t)\sin nt\,dt, \tag{7}$$

$$(-1)^n \varphi(\pi,\lambda_n) = 1 + \frac{1}{n}\int_0^\pi h(t)\sin nt\,dt, \tag{8}$$

где

$$c = h + H + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt.$$

Если вместо краевого условия (3) взять условие

$$y(\pi) = 0, \tag{9}$$

то для собственных значений $\mu_0 < \mu_1 < \ldots$ задачи (1), (2), (9) будем иметь

$$\sqrt{\mu_n} = n + \frac{1}{2} + \frac{c_1}{\pi n} + \frac{1}{n}\int_0^\pi \chi(t)\cos(2n+1)t\,dt, \quad n > 0, \tag{10}$$

где

$$\chi \in L_p(0,\pi), \quad c_1 = h + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt.$$

Доказательство этой леммы можно получить, если дополнить рассуждения §2 главы 1 из [7] некоторыми несложными выкладками.

С помощью асимптотических формул (6) и (7) доказывается

Теорема 1. *Ряд*

$$\sum_{n \ge 1}\left(\rho_n \cos\sqrt{\lambda_n}\,x - \frac{2}{\pi}\cos nx\right)$$

сходится на $[0,2\pi]$, *его сумма абсолютно непрерывная функция на* $[0,2\pi)$ *и ее производная принадлежит* $L_p(0,\pi)$, $(p = 1;2)$.

Пусть

$$\Phi(x) = \sum_{n \ge 1} \left(\rho_n \cos \sqrt{\lambda_n}\, x - \frac{2}{\pi} \cos nx \right) + \rho_0 \cos \sqrt{\lambda_0}\, x - \frac{1}{\pi}, \quad x \in [0,2\pi),$$

$$\Phi(2\pi) = \Phi(2\pi - 0).$$

Обозначим

$$f(x,y) = \frac{1}{2} \left\{ \Phi(x+y) + \Phi(|x-y|) \right\}, \quad x,y \in [0,\pi].$$

Имеет место соотношение [1]

$$K(x,y) + f(x,y) + \int_0^x f(t,y)K(x,t)dt = 0, \quad (0 \le y \le x \le \pi), \tag{11}$$

где K(x,y) - ядро оператора преобразования для системы (1)-(3):

$$\varphi(x,\lambda) = \cos \sqrt{\lambda}\ x + \int_0^x K(x,y) \cos \sqrt{\lambda}\ y dy, \ \ 0 \le x \le \pi. \tag{12}$$

Для фиксированного x (11) является интегральным уравнением Фредгольма, где неизвестной является K(x,y). (11) есть известное интегральное уравнение Гельфанда - Левитана. Из асимптотической формулы (6) следует ([1], §11 или [4], §6), что уравнение (11) имеет единственное решение для любого $x \in [0,\pi]$. Можно показать, что K(x,x) абсолютно непрерывная функция на $[0,\pi]$ и $q(x) = [1/2][d/dx]K(x,x) \in L_p(0,\pi)$. Одновременно получаем, что

$$h = -\sum_{n \ge 1} \left(\rho_n - \frac{2}{\pi} \right) - \left(\rho_0 - \frac{1}{\pi} \right), \tag{13}$$

$$H = -\sum_{n \ge 1} \left(\rho_n \varphi^2(\pi,\lambda_n) - \frac{2}{\pi} \right) - \left(\rho_0 \varphi^2(\pi,\lambda_0) - \frac{1}{\pi} \right). \tag{14}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2 *(основная). Пусть последовательности* $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots$ и $0 < \rho_0 < \rho_1 < \ldots$ *удовлетворяют, соответственно, асимптотическим соотношениям (6) и (7), где* c - *некоторое число. Тогда существует вещественная функция* $q \in L_p(0,\pi)$ *и вещественные числа* h *и* H *такие, что* $\lambda_n = \lambda_n$

(q,h,H), $\rho_n = \rho_n(q,h,H)$, *где* h *и* H *определяются формулами* (13) *и* (14).

Следствие 1. *Чтобы возрастающая последовательность* $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots$ *была последовательностью собственных значений некоторой краевой задачи (1) - (3), необходимо и достаточно выполнение асимптотического соотношения (6) при некотором* c.

2. Функция $q \in L_p(0,\pi)$ называется четной на $(0,\pi)$ (вернее четной относительно $x = [(\pi)/2]$), если $q(\pi-x) = q(x)$, $x \in (0,\pi)$. Если же, кроме того, $H = h$, то говорят, что тройка $\tilde{q} = \{q,h,h\}$ - четная. Если $\tilde{q}$ - четная, то очевидно, что вместе с $\varphi(x,\lambda_n)$ собственной функцией задачи (1)-(3) будет также $\varphi(\pi-x,\lambda_n)$. Отсюда, применяя теорему Штурма о нулях $\varphi(x,\lambda_n)$, получаем, что $\varphi(\pi-x,\lambda_n) = (-1)^n\varphi(x,\lambda_n)$. При $x = 0$ имеем

$$\varphi(\pi,\lambda_n) = (-1)^n, \quad n = 0,1,2\ldots \tag{15}$$

Можно показать, что верно и обратное утверждение.

Лемма 2. *Для четности* $\tilde{q}$ *необходимо и достаточно выполнение равенств (15).*

Из формулы Грина легко следует, что

$$\int_0^\pi \varphi^2(x,\lambda_n)dx = \varphi(\pi,\lambda_n)\dot{D}(\lambda_n), \tag{16}$$

где

$$D(\lambda) = -(\varphi'(\pi,\lambda) + H\varphi(\pi,\lambda)),$$

а [D\dot] есть производная D по λ.

Таким образом,

$$\rho_n^{-1} = \varphi(\pi,\lambda_n)\dot{D}(\lambda_n). \tag{17}$$

Нули целой функции $D(\lambda)$ совпадают с λ_n, и из теоремы Адамара и оценок (4) и (5) следует, что

$$D(\lambda) = \pi(\lambda - \lambda_0)\prod_{n \geq 1} \frac{\lambda_n - \lambda}{n^2}.$$

Таким образом, $D(\lambda)$ и $\dot{D}(\lambda)$ однозначно определяются последовательностью $\{\lambda_n\}_0^\infty$. Из (17) следует

Теорема 3. *Если* $\{\lambda_n\}_0^\infty$ *- последовательность собственных значений задачи (1) - (3) при некотором* $q_0 \in L_p(0,\pi)$, h_0 и H_0, *то существуют четная функция* $q \in L_p(0,\pi)$ *и число* h *такие, что* $\lambda_n = \lambda_n(q,h,h)$.

При этом h определяется формулой

$$h = -\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{\dot{D}(\lambda_n)} - \frac{2}{\pi}\right) - \left(\frac{1}{\dot{D}(\lambda_0)} - \frac{1}{\pi}\right). \qquad (18)$$

Действительно, если $\tilde{q}=\{q,h,h\}$ - искомая тройка, то из (15) и (17) следует, что $\rho_n^{-1} = (-1)^n \dot{D}(\lambda_n)$. Следовательно, $\rho_n = (-1)^n \rho_n^0 \varphi_0(\pi,\lambda_n)$.

Из (7) и (8) следует, что ρ_n удовлетворяет (7). Тогда из теоремы 2 и леммы 2 следует, что существуют четная функция q и число h такие, что $\lambda_n = \lambda_n(q,h,h)$. Формула (18) следует из (13).

В. Амбарцумян в [8] доказал теорему о том, что если $h = H = 0$ и $\lambda_n = n^2$ $(n = 0,1,2,\ldots)$, то $q(x) = 0$. Она получила свое обобщение лишь спустя 54 года в замечательных работах [5] и [6]. Мы доказываем более общую теорему.

Теорема 4. *Если* $q \in L_1(0,\pi)$, $\hat{q} \in L_1(0,\pi)$, q - *четная функция, то из*

$$\lambda_n(q,h,h) = \lambda_n(\hat{q},h,h), \quad (n = 0,1,2,\ldots)$$

следует, что $q(x) = \hat{q}(x)$ *почти всюду в* $[0,\pi]$.

Следствие 2. *Если* $\{\lambda_n\}_0^\infty$ *удовлетворяет условию (6), то существует такое число* h *(оно определяется формулой (18)), что из* $\lambda_n(r,h,h) = \lambda_n$, $(n = 0,1,2,\ldots)$ *функция* $r \in L_1(0,\pi)$ *определяется единственным образом. Эта функция оказывается четной.*

Приведем схему доказательства теоремы 4. Из (13) следует, что

$$\sum_{n\geq 1}(\hat{\rho} - \rho_n) = \sum_{n\geq 1}\rho_n\left(\frac{\hat{\rho}_n}{\rho_n} - 1\right) = 0. \qquad (19)$$

Так как q - четная, то из леммы 2, равенства (17) следует, что $\hat{\varphi}(\pi,\lambda_n) = (-1)^n\rho_n\hat{\rho}_n^{-1}$. Отсюда и из (14), учитывая, что $h = H$, получаем

$$h = \sum_{n\geq 1}\left(\frac{\rho_n^2}{\hat{\rho}_n} - \frac{2}{\pi}\right) - \left(\frac{\rho_0^2}{\hat{\rho}_0} - \frac{1}{\pi}\right),$$

что вместе с (13) дает

$$\sum_{n\ge 0}\left(\frac{\rho_n^2}{\hat{\rho}_n}-\rho_n\right)=\sum_{n\ge 0}\rho_n\left(\frac{\rho_n}{\hat{\rho}_n}-1\right)=0. \tag{20}$$

После сложения (19) и (20) получаем

$$\sum_{n\ge 0}\rho_n\left(\frac{\hat{\rho}_n}{\rho_n}+\frac{\rho_n}{\hat{\rho}_n}-2\right)=0.$$

Так как каждое слагаемое в этом равенстве неотрицательное и $\rho_n > 0$, то следует, что $\hat{\rho}_n = \rho_n$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ и из условия теоремы 4 и теоремы Марченко о единственности получаем, что $\hat{q}(x) = q(x)$ почти всюду.

В работах [5] и [6] результаты п. 2 установлены для $q \in L_2(0,\pi)$.

3. Приведем одно применение теоремы 3.

Рассмотрим уравнение (1) на интервале $(0,[(\pi)/2])$ и краевые условия на правом конце:

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0, \tag{21}$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0. \tag{22}$$

Пусть $\{\lambda_n\}_0^\infty$ - последовательность собственных значений задачи (1)-(3), где q - четная и $q \in L_p(0,\pi)$. Тогда $\varphi(\pi - x,\lambda_n) = (-1)^n\varphi(x,\lambda_n)$. Отсюда следует, что $\varphi([(\pi)/2],\lambda_{2n+1}) = 0$ и $\varphi'([(\pi)/2],\lambda_{2n}) = 0$.

Это означает, что $\{\lambda_{2n}\}_0^\infty$ и $\{\lambda_{2n+1}\}_0^\infty$ являются, соответственно, собственными значениями краевых задач (1), (2), (21) и (1), (2), (22). Отсюда с помощью следствия 1 и теоремы 3 можно доказать следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть возрастающие последовательности* $\{\nu_n\}_0^\infty$ *и* $\{\mu_n\}_0^\infty$ *перемежаются:*

$$\nu_0 < \mu_0 < \nu_1 < \mu_1 < \ldots$$

и удовлетворяют асимптотическим формулам

$$\sqrt{\nu_n} = n + \frac{c_1}{n} + \frac{1}{n}\int_0^\pi f_1(t)\cos nt\,dt,$$

$$\sqrt{\mu_n} = n + \frac{1}{2} + \frac{c_1}{n} + \frac{1}{n}\int_0^\pi \chi_1(t)\cos 2n + 1tdt,$$

где $f_1, \chi_1 \in L_p(0,\pi)$, а c_1 - некоторое число.

Тогда существуют $q \in L_p(0,\pi)$ и число h такие, что $\{\nu_n\}_0^\infty$ и $\{\mu_n\}_0^\infty$ совпадают с собственными значениями задач (1), (2), (3) с $H = 0$ и (1), (2), (9), соответственно.

Следствие 3. *Чтобы возрастающая последовательность* $\{\mu_n\}_0^\infty$ *была последовательностью собственных значений некоторой краевой задачи (1), (2), (9), необходимо и достаточно выполнение асимптотического соотношения (10) при некотором* c_1.

Ереванский государственный университет

Литература

1. *Гельфанд И. М. , Левитан Б. М.* - Изв. АН АрмССР. Математика. 1951. Т. 15. С. 309 - 360.
2. *Марченко В. А.* Операторы Штурма - Лиувилля и их приложения. Киев. Наукова Думка. 1977.
3. *Левитан Б. М.* Обратные задачи Штурма - Лиувилля. М. Наука. 1984.
4. *Левитан Б. М., Гасымов М. Г.* - УМН. 1964. Т. 19. Вып. 2(116). С. 3-63.
5. *Isaakson E. L., Trubowitz* - Pure Appl. Math. 1983. V. 36. N 6. P. 763-783.
6. *Isaakson E. L., McKean H. P., Trubowitz* - Pure Appl. Math. 1984. V. 37. N 1. P. 1-12.
7. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Введение в спектральную теорию. М. Наука. 1970.
8. *Ambarzumian V. A.* - Z. Physik. 1929. B. 53. S. 690-695.

Վ. Ա. Յավրյան

Վերջավոր միջակայքում Շտուրմ - Լուիվիլի հակադարձ խնդրի մասին

Աշխատանքում դիտարկվում է հետևյալ եզրային խնդիրը.

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in (0,\pi), \quad q \in L_p(0,\pi), \quad (p = 1;2), \tag{1}$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \tag{2}$$

h-ը և H-ը իրական թվեր են:

Լուծվում է հետևյալ հարցը. ինչպիսի՞ն պետք է լինեն $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ և $0 < \rho_0 < \rho_1 < \cdots$ հաջորդականությունները, որպեսզի նրանք լինեն (1), (2) տեսքի եզրային խնդրի սեփական արժեքները և նորմավորող թվերը: Այս հարցի պատասխանը տրված է այդ հաջորդականու-թյունների ասիմպտոտիկ վարքի տերմիններով:

Քննարկվում է նաև միայն սպեկտրով և h ու H թվերով եզրային խնդրի միարժեք վերականգնման հարցը:

V. A. Yavrian

On the inverse Sturm - Liouville problem on a finite interval.

In this paper the following boundary problem is being considered:

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in (0,\pi), \quad q \in L_p(0,\pi), \quad (p = 1;2), \tag{1}$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \tag{2}$$

h and H are real numbers.

The following question is solved: Under which conditions the sequences $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ and $0 < \rho_0 < \rho_1 < \cdots$ are the eigenvalues and the normalizing numbers for some boundary problem (1), (2). Tne answer is given in terms of an asymptotical behaviour of these sequences.

It is also studied the problem of unique restoration of the boundary problem (1), (2) by spectrum only and numbers h and H.