УДК 517.53

С. В. Мадоян

Некоторые свойства функций из F-алгебр Зигмунда в шаре и полидиске

(Представлено чл.-кор. НАН РА Г. Г. Геворкяном 15/XII 2004)

Пусть n - натуральное и $C^n = \{z = (z_1,...,z_n) : z_k \in C, 1 \le k \le n\}$. Обозначим $G = B_n = \{z \in C^n : |z_1|^2 + ... + |z_n|^2 < 1\}$ или $G = U^n = \{z \in C^n : |z_k| < 1, 1 \le k \le n\}$ и, соответственно этим двум случаям, $\Gamma = S_n = \{z \in C^n; |z_1|^2 + ... + |z_n|^2 = 1\}$ или $\Gamma = T^n = \{z \in C : |z_k| = 1, 1 \le k \le n\}$. На Γ существует естественная нормированная инвариантная относительно вращений Γ мера σ, совпадающая с обычной нормированной мерой Лебега (площадью) на сфере S_n в случае $\Gamma = S_n$ и являющаяся прямым произведением мер Лебега на единичных окружностях, составляющих тор T^n, в случае $\Gamma = T^n$. Символом $|z|$ для $z \in C$ в случае $G = B_n$ будем обозначать обычную евклидову норму вектора z, а в случае $G = U^n$ под $|z|$ будем понимать поликруговую норму $|z| = \max\limits_{1\le k\le n} |z_k|$, $z \in C$. В случае, когда $n = 1$, шар B_n и поликруг U^n совпадают с единичным кругом в комплексной плоскости C, сфера S_n и тор T^n совпадают с единичной окружностью, мера σ - с нормированным элементом длины на ней.

Голоморфную в G функцию f относят к классу $\varphi(N)$, φ - неубывающая неотрицательная функция вещественного аргумента на положительной полуоси, если

$$\sup_{0 \le r \le 1} \int_{r} \varphi(\log^+|f(r\zeta)|)\sigma(d\zeta) < +\infty,$$

где $\log^+ a$ совпадает с $\log a$, когда $a > 1$ и $\log^+ a = 0$ для $0 \le a < 1$. При $\varphi(t) = t$ получаем класс Неванлинны N в шаре и поликруге, при $\varphi(t) = e^{pt}$, $p > 0$ - классы Харди H^p. Полагая $\varphi(t) = t \log_+^\alpha t$, $\alpha > 0$, приходим к многомерным классам $N\log^\alpha N$, введенным в случае поликруга Зигмундом в [1, гл. XVII] (под обозначением H_α) и изучавшимся в обоих случаях в [2] ($\alpha = 1$) и в [3] ($\alpha \ge 1$), где, в частности, показано, что $N\log^\alpha N$ при $\alpha \ge 1$ образуют F-алгебры относительно естественных метрик.

По определению, голоморфная функция f в области G принадлежит классу $\varphi(M)$, если

$$\int\limits_{\Gamma} \log^{+} \sup_{0 \le r \le 1} |f(r\zeta)|\sigma(d\zeta) < +\infty.$$

При $\varphi(t) = t$ класс $\varphi(M) = M$ в случае шара введен Кимом, Паком и Чоу (см. [4], [5]); полагая в этом определении $\varphi(t) = t\log_{+}^{\alpha} t$, $\alpha > 0$, получаем многомерные классы $M\log^{\alpha}M$.

Известно, что функция f принадлежит классу $N\log^{\alpha}N$, $\alpha > 1$, тогда и только тогда, когда $f \in M$ и $\log^{+}|f^{*}| \in L\log^{\alpha}L$, где $f^{*}(\zeta) = \lim\limits_{\Gamma\to 1} f(r\zeta)$ - радиальные граничные пределы функции f на Γ (случай $\alpha = 1$ рассмотрен в [2],

случай $\alpha > 1$ в [3]). Последнее утверждение уточняет следующая

Теорема 1. *Функция* f *принадлежит* $N\log^{\alpha}N$, $\alpha > 1$*, тогда и только тогда, когда* $f \in M\log^{\alpha-1}M$ и $\log^{+}|f^{*}| \in L\log^{\alpha}L$.

С учетом вложения $M \supset M\log^{\alpha-1}M$, $\alpha > 1$, и отмеченного выше результата [3] понятно, что нетривиальная часть уточнения содержит необходимость теоремы.

Хорошо известно, что многие топологические свойства F-алгебр голоморфных функций (например, представление линейных функционалов) устанавливаются через тейлоровские коэффициенты функций. Верна следующая теорема.

Теорема 2. *Если* $f \in N\log^{\alpha-1}N$, $\alpha > 1$, т*о для коэффициентов Тейлора* a_k *кратного ряда Тейлора функции* f,

$$f(z) = \sum_{k \in Z_{+}^{n}} a_k z^k, \quad z \in G, \tag{1}$$

справедлива оценка

$$a_k = C_{n,k}\exp\left[0\left(\frac{|k|^n}{\log^{\alpha}|k|} \right)^{[1/(n+1)]} \right] \quad \text{при } |k| \to \infty, \tag{2}$$

в которой

$$C_{n,k} = \frac{\Gamma(n+|k|)}{\Gamma\left(n+\frac{|k|}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}{\Gamma(k+1)}, \quad \text{если} \quad G = B_n, \ \text{и} \quad G_{n,k} = 1, \ \text{если} \ G = U^n,$$

$$\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)=\Gamma\left(\frac{k_1}{2}+1\right)\ldots\Gamma\left(\frac{k_n}{2}+1\right),\quad |k|=k_1+\ldots+k_n \text{ для } k\in Z_+^n \text{ и}$$

$$\Gamma(s),\ s>0\ -\ \textit{гамма–функция Эйлера.}$$

Замечание. В случае поликруга $G = U^n$ оценка (2) может быть доказана в следующей, более точной форме:

$$|a_l| \le \exp\left[0\left(\frac{[l]}{\log^a[l]}\right)^{[1/(n+1)]}\right] \text{ при } |l|\to+\infty, \tag{2'}$$

где $[l]$ обозначает произведение всех тех l_k, $l=(l_1,\ldots,l_n)$, которые отличны от нуля.

Государственный инженерный университет Армении

Литература

1. *Зигмунд А.* - Тригонометрические ряды. Т. 2. М. Мир. 1965.
2. *Гаврилов В. И., Субботин А. В.* - Матер. конф. "Вопр. функц. анализа и матем. физики." Баку. Чашиоглу. 1999. С. 240-251.
3. *Ա. Վ. Մայյան* - Մաթեմատիկան բարձրագույն դպրոցում, 2003, N4, էջ, 21-28:
4. *Kim H. O., Park Y. Y.* - Tsukuba J. Math. 1992. V. 16. N 1. P. 11-18.
5. *Choe B. R., Kim H. O.* - Complex Variables. 1992. V. 20. P. 53-56.

Ս. Վ Մադոյան

Գնդում և պոլիդիսկում Զիգմունդի F-հանրահաշիվների ֆունկցիաների որոշ հատկություններ

Հոդվածը պարունակում է նախկինում գնդում և պոլիդիսկում $Nlog^{\alpha}N$, $\alpha > 1$, F-հանրահաշիվների համար ստացված արդյունքների որոշ լրացումներ, ինչպես նաև այդ դասերի ֆունկցիաների թեյլորյան գործակիցների գնահատականներ:

S. V. Madoyan

Some Properties of Functions of Zigmund’s F-algebras in Ball and Polydisk

This paper contains some complements of results found for F-algebras $Nlog^{\alpha}N$ in ball and polydisk as well as estimations of the Taylor coefficients of functions of these classes.