

Г. С. Бабаджанян¹, С. А. Бабаджанян²

Конденсация Бозе - Эйнштейна в D-мерной системе идеального газа бозонов со спектром возбуждения $\varepsilon_p = c p^s$ в присутствии внешнего поля с

произвольной формой удерживающего потенциала $U(\vec{r})$

(Представлено академиком Д. М. Седракианом 22/IX 2004)

Введение. Эксперименты по конденсации Бозе - Эйнштейна (БЭК) побудили к теоретическим исследованиям термодинамики идеального Бозе-газа, находящегося во внешнем удерживающем поле, потенциалами которого являются степенные функции. При этом в случае анизотропных и изотропных полей в целях общности

соответствующие степенные потенциалы представлялись в виде $U(\vec{r}) = \sum_{i=1}^D a_i |x_i|^{q_i}$ и $U(\vec{r}) = ar^q$. В тех же целях потенциалы аксиально-симметричных полей представляем в виде $U(\vec{r}) = a_{\perp} r_{\perp}^{q_{\perp}} + a_3 |x_3|^{q_3}$. В выражениях для

потенциалов $D = 1, 2, 3$ - пространственная размерность системы бозонов, $r = (\sum_{i=1}^D x_i^2)^{1/2}$, $r_{\perp} = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$, где $x_1, \dots, x_D \in \Omega$ и Ω - объем D-мерной области пространства, занимаемой системой (см. [1, 2]).

Результаты исследований показывают, что внешние поля могут способствовать возникновению БЭК, т.е. тому, чтоб температура БЭК $T_0 > 0$ [2, 3], и влиять на свойство непрерывности термодинамических функций в точке T_0 , тем самым меняя характер фазового перехода при БЭК [1, 2]. В то же время в отношении указанных аспектов явления БЭК они не полны и не всегда имеют общий характер; не установлен также весь спектр возможных характеров ее фазового перехода. Кроме того, с точки зрения физики фазовых переходов представляется важным

в структуре внешних удерживающих полей провести четкую идентификацию универсального для всех $U(\vec{r})$ источника и характеристик его влияния на возможность БЭК и характер ее фазового перехода [4].

В настоящей работе в рамках квазиклассического приближения асимптотическими методами исследуются возможность БЭК и характер ее фазового перехода (ФП) в идеальном Бозе-газе, находящемся во внешнем поле с

произвольным потенциалом $U(\vec{r})$, только лишь удовлетворяющим общим необходимым требованиям удержания бозонов в (1,2,3)D-мерной области пространства Ω . При этом, не исключив возможности наблюдения явления БЭК в системах бозонов с отличным от $\varepsilon_p = p^2/2m$ спектром возбуждения, $\varepsilon_p(p)$ будем задавать в несколько более общем виде, $\varepsilon_p = c p^s$ ($c, s > 0$), например экситонов [5].

Возможность БЭК и ее критические параметры. Пусть поле $U(\vec{r})$ для простоты во всей области Ω непрерывно.

Кроме того, во всей области Ω поле $U(\vec{r}) \geq 0$ и на границе области Ω имеем $U(x_1, \dots, x_D) = \infty$. И пусть в некоторой

точке $(x_1, \dots, x_D) \in \Omega$ (для простоты $x_{1,0} = 0, \dots, x_{D,0} = 0$) поле принимает свое наименьшее значение ($U(\vec{r}) = 0$) и эта точка является точкой минимума. Вместе с тем в окрестности точки минимума асимптотическое поведение поля аппроксимируется степенными калибровочными функциями, соответственно образующими либо

анизотропную, либо изотропную, либо аксиально-симметричную форму:

$$U(x_1, \dots, x_D) \approx \sum_{i=1}^D a_i |x_i|^{q_i}, \quad U(\vec{r}) \approx ar^q, \quad U(\vec{r}) \approx a_\perp r_\perp^{q_\perp} + a_3 |x_3|^{q_3}. \quad (1)$$

Отметим, что большинство реализуемых полей удовлетворяет такому определению. Тогда для химического потенциала μ и полной энергии E системы будем иметь:

$$N = \int_0^\infty \frac{T \rho(T\tilde{\varepsilon}) d\tilde{\varepsilon}}{e^{\tilde{\varepsilon} + \tilde{\mu}} - 1} + N_{\varepsilon=0}(T), \quad (2)$$

$$E = \int_0^\infty \frac{\tilde{\varepsilon} T^2 \rho(T\tilde{\varepsilon}) d\tilde{\varepsilon}}{e^{\tilde{\varepsilon} + \tilde{\mu}} - 1}, \quad (3)$$

где $N_{\varepsilon=0}(T)$ - число бозонов на уровне $\varepsilon = 0$, $\tilde{\mu} = -\mu/T$, $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/T$ и ε полная энергия частицы

$$\varepsilon = cp^s + U(\vec{r}), \quad (4)$$

а $\rho(T\tilde{\varepsilon})$ - плотность одночастичных состояний

$$\rho(T\tilde{\varepsilon}) = \frac{D\pi^{[D/2]}}{h^D \Gamma(1 + D/2) s c^{D/s}} \int_{U(\vec{r}) \leq T\tilde{\varepsilon}} (T\tilde{\varepsilon} - U(\vec{r}))^{D/s-1} dx_1 \dots dx_D. \quad (5)$$

Температура конденсации T_0 определяется из (2) при $\mu = 0$ и $N_{\varepsilon=0} = 0$

$$N = \int_0^\infty \frac{T_0 \rho(T_0 \tilde{\varepsilon}) d\tilde{\varepsilon}}{e^{\tilde{\varepsilon}} - 1}. \quad (6)$$

Поскольку конечность (бесконечность) значения интеграла из (6) в конечном счете сводится к его сходимости (несходимости) на нижнем пределе интегрирования $\tilde{\varepsilon} \rightarrow 0$, а при $\tilde{\varepsilon} \rightarrow 0$ область интегрирования $U(\vec{r}) \leq \tilde{\varepsilon} T$ интеграла из (5) стягивается в малую окрестность точки минимума $U(\vec{r})$, то влияние внешнего поля на возможность БЭК, т.е. при $T_0 > 0$, полностью определяется характером асимптотического поведения поля в окрестности точки его минимума. Тогда, представив (6) в виде

$$N = \int_{\tilde{\varepsilon}_0}^{\infty} \frac{T_0 \rho(T_0 \tilde{\varepsilon}) d\tilde{\varepsilon}}{e^{\tilde{\varepsilon}} - 1} + \int_0^{\tilde{\varepsilon}_0} \frac{T_0 \rho(T_0 \tilde{\varepsilon}) d\tilde{\varepsilon}}{e^{\tilde{\varepsilon}} - 1} \quad (7)$$

и взяв $\tilde{\varepsilon}_0$ настолько малым, чтобы область интегрирования в (5), т.е. при $\vec{U}(\vec{r}) \leq \tilde{\varepsilon} T$, охватывала из Ω только лишь некоторую окрестность точки абсолютного минимума $\vec{U}(\vec{r})$ и чтобы в этой окрестности имело место (1), во втором интеграле (13) для плотности числа состояний будем иметь

$$\rho(T_0 \tilde{\varepsilon}) \approx A T_0^{[D/s] + \chi_f - 1} \tilde{\varepsilon}^{[D/s] + \chi_f - 1} \int_{\substack{[(\xi_1, \dots, \xi_D \geq 0), \\ (\xi_1 + \dots + \xi_D \leq 1)]}} \left(1 - \sum_{i=1}^D \xi_i \right)^{[D/s] - 1} \prod_{i=1}^D \xi_i^{[1/(q_i)] - 1} d\xi_1 \dots d\xi_D, \quad (8)$$

где $\xi_i = (a_i / \tilde{\varepsilon} T) |x_i^{q_i}|$, коэффициент A равен $A = Ds^{-1} (2\pi^{1/2} h^{-1} c^{-1/s})^D \Gamma^{-1}(1 + D/2) \prod_{i=1}^D q_i^{-1} a_i^{-1/q_i}$, χ_f - полевой параметр, отражающий характер асимптотического поведения поля в окрестности точки его минимума, равный

$$\chi_f = \sum_{i=1}^D q_i^{-1}. \quad (9)$$

После подстановки (8) во второй интеграл из (7) и с учетом того, что при $\tilde{\varepsilon} \ll 1$ имеет место оценка $(\tilde{\varepsilon} - 1) \approx \tilde{\varepsilon}$ и что ввиду $D/s - 1 > -1$ интеграл из (8) конечен, правая часть (7) будет конечной и вместе с этим БЭК будет возможной ($T_0 > 0$) при условии

$$\chi = \chi_s + \chi_f > 1, \quad (10)$$

где $\chi_s = D/s$ - параметр спектра возбуждения, а χ интегральный параметр спектра-поля. Нетрудно показать, что в случае изотропной и аксиально-симметричной форм асимптотического поведения внешних полей в условии (10) $\chi_f = D/q$ и $\chi_f = 2/q_{\perp} + 1/q_z$ соответственно. При $s = 2$ условие (10) совпадает с условием возможности БЭК,

полученным в работе [3] для степенного поля $\vec{U}(\vec{r}) = ar^q$. Кроме того при отсутствии внешнего поля, т.е. при $\chi_f = 0$ ($q_1, \dots, q_D, q, q_{\perp} = \infty$), (10) переходит в обычное условие возможности БЭК, $0 < s < D$ (см. например [5]).

Характер фазового перехода при БЭК. Таким образом, при $\chi = \chi_s + \chi_f > 1$ имеем $T_0 > 0$, и тогда из $\mu(T_0 + 0) = 0$ и $\mu(T_0 - 0) = 0$ следует, что $\mu(T_0 + 0) = \mu(T_0 - 0)$ и $E(T_0 + 0) = E(T_0 - 0)$, так что в точке фазового перехода $T = T_0$ термодинамические потенциалы $\mu(T)$ и $E(T)$ будут непрерывны. Откуда, поскольку $\Omega = \text{const}$ и при этом $dS =$

dE/T , энтропия $S(T) = E/T + \int E dT/T^2$ также непрерывна и в идеальном газе бозонов при любом $\varepsilon_p = c p^s$ и $\vec{U}(\vec{r})$ БЭК не может быть ФП1. Обратимся к исследованию поведения k -кратных производных μ и E по T , $\mu^{(k)}(T)$ и $E^{(k)}(T)$,

в точке T_0 ($k = 1, 2, \dots$) посредством определения асимптотических значений (ноль, конечность, бесконечность)

скачков $[\mu^{(k)}]_{T_0}$, $[E^{(k)}]_{T_0}$ ($[f^{(k)}]_{T_0} = (\partial^k f / \partial T^k)_{T_0+0} - (\partial^k f / \partial T^k)_{T_0-0}$). Для этого напомним общие выражения для скачков начиная с $k = 1$, которые получаются с учетом того, что $N = N(T, \tilde{\mu})$, $E = E(T, \tilde{\mu})$ и $\partial N / \partial T = \partial^2 N / \partial T^2 = \dots = \partial^k N / \partial T^k = 0$ (полное число бозонов $N = \text{const}$), а также того, что при $T \leq T_0$ имеем $\mu = \partial \mu / \partial T = \dots = \partial^k \mu / \partial T^k = 0$:

$$\frac{1}{T_0} \left[\frac{\partial \mu}{\partial T} \right]_{T_0} = \lim_{T \rightarrow T_0+0} \frac{1}{T} \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_T = \lim_{T \rightarrow T_0+0} \left(\int_0^\infty Q_T d\tilde{\varepsilon} \right) \left(\int_0^\infty Q_{\tilde{\mu}} d\tilde{\varepsilon} \right)^{-1}, \quad (11)$$

$$[C]_{T_0} = - \lim_{T \rightarrow T_0+0} \frac{1}{T} \frac{\partial \mu}{\partial T} \int_0^\infty R_{\tilde{\mu}}(T, \tilde{\mu}, \tilde{\varepsilon}) d\tilde{\varepsilon}, \quad (12)$$

$$\left[\frac{\partial^2 E}{\partial T^2} \right]_{T_0} = \lim_{T \rightarrow T_0+0} \left\{ -\frac{2}{T} \frac{\partial \mu}{\partial T} \int_0^\infty \left(R_{T\tilde{\mu}} - \frac{R_{\tilde{\mu}}}{T} \right) d\tilde{\varepsilon} + \frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)^2 \int_0^\infty R_{\tilde{\mu}\tilde{\mu}} d\tilde{\varepsilon} - \frac{1}{T} \frac{\partial^2 \mu}{\partial T^2} \int_0^\infty R_{\tilde{\mu}} d\tilde{\varepsilon} \right\}, \quad (13)$$

$$\frac{1}{T_0} \left[\frac{\partial^2 E}{\partial T^2} \right]_{T_0} = \lim_{T \rightarrow T_0+0} \left(\int_0^\infty Q_{TT} d\tilde{\varepsilon} - \frac{2}{T} \frac{\partial \mu}{\partial T} \int_0^\infty \left(Q_{T\tilde{\mu}} - \frac{Q_{\tilde{\mu}}}{T} \right) d\tilde{\varepsilon} + \frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)^2 \int_0^\infty Q_{\tilde{\mu}\tilde{\mu}} d\tilde{\varepsilon} \right) \left(\int_0^\infty Q_{\tilde{\mu}} d\tilde{\varepsilon} \right)^{-1}, \quad (14)$$

где через $Q = Q(T, \tilde{\mu}, \tilde{\varepsilon})$ и $R = R(T, \tilde{\mu}, \tilde{\varepsilon})$ обозначены подынтегральные выражения из (2) и (3), а $Q_T, Q_{\tilde{\mu}}, \dots, R_T, R_{\tilde{\mu}}, \dots$ их частные производные по T и $\tilde{\mu}$.

При этом нетрудно заметить, что скачки высших производных также будут представляться аналогичными (11)-(14) алгебраическими выражениями относительно несобственных интегралов от производных R и Q по T и $\tilde{\mu}$, до k -порядка включительно. Поскольку асимптотические значения этих скачков (ноль, конечность и бесконечность) также определяются сходимостью (расходимостью) интегралов из (11)-(14) на нижнем пределе их интегрирования, в том же числе интегралов из предполагаемых выражений для скачков высших производных, то влияние внешних полей на характер фазового перехода при БЭК будет определяться

поведением $U(\vec{r})$ в окрестности точки его минимума. При этом, учтя, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеется оценка (8) и при T

$\rightarrow T_0$ имеем $\mu(T) \rightarrow 0$, для асимптотических поведений подынтегральных выражений $Q_{\underbrace{T \dots T}_m \underbrace{\tilde{\mu} \dots \tilde{\mu}}_l}(T, \tilde{\mu}, \tilde{\varepsilon})$ и

$R_{\underbrace{T \dots T}_m \underbrace{\tilde{\mu} \dots \tilde{\mu}}_l}(T, \tilde{\mu}, \tilde{\varepsilon})$ этих интегралов на нижнем пределе интегрирования $\varepsilon \rightarrow 0$ будем иметь:

$$Q_{\underbrace{T \dots T}_m \underbrace{\tilde{\mu} \dots \tilde{\mu}}_l} \sim \frac{\tilde{\varepsilon}^{k-1}}{(\tilde{\varepsilon} + \tilde{\mu})^{l+1}}, \quad (15)$$

$$R_{\underbrace{T \dots T}_m \underbrace{\tilde{\mu} \dots \tilde{\mu}}_l} \sim \frac{\tilde{\varepsilon}^k}{(\tilde{\varepsilon} + \tilde{\mu})^{l+1}}, \quad (16)$$

где $m + l = k$ и $k = 1, 2, \dots$ порядок дифференцирования $\mu(T)$ и $E(T)$ по T . Откуда получаем, что асимптотическое поведение этих интегралов на нижнем пределе интегрирования аппроксимируется в виде:

$$\int_{\tilde{\varepsilon}} Q_{\underbrace{T \dots T}_m \underbrace{\tilde{\mu} \dots \tilde{\mu}}_l} d\tilde{\varepsilon} \Big|_{\tilde{\varepsilon} \rightarrow 0} \sim \tilde{\mu}^{\chi-1-1} (\sim \ln \tilde{\mu} \text{ при } \chi = 1+1), \quad (17)$$

$$\int_{\tilde{\varepsilon}} R_{\underbrace{T \dots T}_m \underbrace{\tilde{\mu} \dots \tilde{\mu}}_l} d\tilde{\varepsilon} \Big|_{\tilde{\varepsilon} \rightarrow 0} \sim \tilde{\mu}^{\chi-1} (\sim \ln \tilde{\mu} \text{ при } \chi = 1). \quad (18)$$

Подставляя (17) и (18) (с соответствующими значениями m и l) в выражение для скачков первых производных из (11) и (12), получаем, что при

$$2 < \chi < \infty \quad (19)$$

БЭК является ФП2 с конечным скачком $[\mu^{(1)}]_{T_0}$ и $[E^{(1)}]_{T_0}$. А при

$$1 < \chi \leq 2 \quad (20)$$

$\mu^{(1)}$ и $E^{(1)}$ непрерывны в точке $T = T_0$, так что при условии (20) БЭК перестает быть ФП2. В то же время подставляя (17) и (18) в (13) и (14), получаем, что при

$$3/2 \leq \chi \leq 2 \quad (21)$$

$\mu^{(2)}$ и $E^{(2)}$ при $T = T_0$ перестают быть непрерывными: при $3/2 \leq \chi \leq 2$ скачки $[\mu^{(2)}]_{T_0}$, $[E^{(2)}]_{T_0} = \infty$ и при $\chi = 3/2$ конечны. Так что при условии (21) БЭК является ФП3. А при $\chi < 3/2$ $\mu^{(2)}$ и $E^{(2)}$ непрерывны в точке $T = T_0$.

Поступая аналогичным образом, нетрудно показать, что для $k \geq 3$ скачки $[\mu^{(k)}]_{T_0}$ и $[E^{(k)}]_{T_0}$ бесконечны при $(k+1)/k < \chi < k/(k-1)$,

конечны при $\chi = (k+1)/k$ и равны нулю при $\chi < (k+1)/k$. Следовательно, при

$$(k+1)/k \leq \chi < k/(k-1) \quad (22)$$

БЭК согласно классификации Эренфеста можно считать ФП(ν), где $\nu = k+1$. При выводе критериев (21) и (22)

учитывалось, что для асимптотических значений скачков $[\mu^{(k)}]_{T_0}$ и $[E^{(k)}]_{T_0}$ в числителях соответствующих

выражений определяющими являются члены, содержащие $\int_0^\infty Q_{\underbrace{\tilde{\mu} \dots \tilde{\mu}}_l} d\tilde{\varepsilon}$.

Отметим, что критерии (19) и (21) при $s = 2$ и $D = 3$ переходят в соответствующие критерии, полученные в [1], при этом уточняя нижнюю границу значения χ , при котором БЭК является ФП3 ($\chi = 1 \rightarrow \chi = 3/2$). Вместе с этим в отличие от [1] соответственно (22) имеем, что на области значений $\chi \in (1, 3/2)$ БЭК может быть любым ФП(ν)

(вплоть до $\nu \rightarrow \infty$) с конечным либо бесконечным значением скачков $[\mu^{(k)}]_{T_0}$ и $[E^{(k)}]_{T_0}$ (см. выше).

Универсальная роль критического параметра спектра-поля для фазовых переходов при БЭК. Таким образом, в зависимости от D , s и $q_1, \dots, q_D$ критический параметр χ внутри области $[0, \infty)$ может принимать любые значения (возможные ограничения могут возникнуть из-за реальных значений D , s). Критерии (10), (19), (21) и (22) в этой

области устанавливают бесконечное число универсальных значений $\chi_k = k/(k-1)$ (где $k = 1, 2, 3, \dots$ - кратность

производных термодинамических потенциалов по T) и $\chi_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} k/(k-1) = 1$, посредством которых вся область возможных значений χ разбивается на области возможности и невозможности БЭК, т.е. $1 < \chi < \infty$ и $0 < \chi \leq 1$. А уже область возможности БЭК любыми соседними парами χ_k и χ_{k+1} разбивается на бесконечное число таких универсальных интервалов значений $\Delta\chi_k - \Delta\chi_1 \equiv \{\infty > \chi > 2\}$, $\Delta\chi_2 \equiv \{2 \geq \chi \geq 3/2\}$, $\Delta\chi_3 \equiv \{3/2 > \chi \geq 4/3\}$, ..., $\Delta\chi_k \equiv \{k/(k-1) > \chi \geq (k+1)/k\}$, ..., что при $\chi \in \Delta\chi_k$ БЭК может быть только лишь фазовым переходом порядка $\nu = k+1$ с

конечными скачками $[\mu^{(k)}]_{T_0}$, $[E^{(k)}]_{T_0}$ при $\chi = (k+1)/k$ (нижняя граница интервала $\Delta\chi_k$) и с бесконечным скачком при остальных значениях $\chi \in \Delta\chi_k$ (за исключением $\chi \in \Delta\chi_1$, где БЭК является ФП2 только лишь с

конечными скачками $[\mu^{(1)}]_{T_0}$, $[E^{(1)}]_{T_0}$. Откуда заключаем, что критический параметр χ касательно вопросов фазовых переходов при БЭК во всех отношениях является определяющим. Кроме того, критический параметр χ играет универсальную роль в том смысле, что бесконечное число различных расширенных систем внешнее поле - система бозонов в зависимости от пространственной размерности D , степенного показателя спектра

возбуждения $\varepsilon_p = c p^s$ и характера асимптотического поведения внешнего удерживающего поля $U(\vec{r})$ в окрестности точки его минимума $(q_1, \dots, q_D)$ в отношении фазовых переходов при БЭК можно разделить на различные классы так, чтобы внутри каждого класса расширенные системы в критической области имели идентичное поведение.

Наконец, поскольку внешние поля с произвольными удерживающими потенциалами можно разделить на классы идентичности в отношении значений χ_p то поля со степенными потенциалами при тех же χ_f в отношении вопросов фазовых переходов БЭК будут играть роль калибровочных потенциалов.

В качестве примера рассмотрим систему бозонов со спектром возбуждения $\varepsilon_p = p^2/2m$. В случае изотропности

формы асимптотического поведения поля в окрестности точки его минимума, т.е. $U(\vec{r}) \approx ar^n$, параметр $\chi = D/2 + D/n$ и из (10) имеем $T_0 > 0$, если

$$\left. \begin{array}{l} 1 \quad 1 \quad 1 \\ - > - - - \\ n \quad D \quad 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} D=1, \text{ при } 0 < n < 2 \\ D=2, \text{ при } 0 < n < \infty \\ D=3, \text{ при } 0 < n < \infty. \end{array} \quad (23)$$

Причем согласно (19) БЭК является ФП2 с конечным скачком $[\mu^{(1)}]_{T_0}$, $[E^{(1)}]_{T_0}$, если

$$0 < n < \frac{2D}{4-D} \left\{ \begin{array}{l} D=1, \text{ при } 0 < n < 2/3 \\ D=2, \text{ при } 0 < n < 2 \\ D=3, \text{ при } 0 < n < 6. \end{array} \right. \quad (24)$$

И согласно (21) БЭК является ФП3, если

$$\frac{2D}{4-D} \leq n \leq \frac{2D}{3-D} \left\{ \begin{array}{l} D=1, \text{ при } 2/3 \leq n \leq 1 \\ D=2, \text{ при } 2 \leq n \leq 4 \\ D=3, \text{ при } 6 \leq n < \infty. \end{array} \right. \quad (25)$$

Откуда, в частности, заключаем, что для $D = 3$ ни при каком n БЭК не может быть ФП($\nu > 3$). И наконец,

соответственно (18), БЭК является ФП($k + 1$) ($k \geq 3$), если

$$\frac{2(k+1)D}{2k-(k-1)D} < n \leq \frac{2kD}{2(k+1)-kD} \left\{ \begin{array}{l} D=1, \text{ при } 2(k-1)/(k+1) < n \leq 2k/(k+2) \\ D=2, \text{ при } 2(k-1) < n \leq 2k \\ D=3, \text{ при } n \in \emptyset. \end{array} \right. \quad (26)$$

¹Корпорация Вираз Лоджик (Virage Logic Corp.)

²Национальный институт стандартов РА

Литература

1. *Bagnato V., Pritchard D. E., Kleppner D.* - Phys. Rev. A. 1987. V. 35. P. 4354.
2. *Dolfavo F., Giorgini S., Pitaevskii L., Stringari S.* - Review of Modern Physics. 1999. V. 71. P. 463.
3. *Salasnich L.*, - Math J. Phys. 2000. V. 41. P. 8016.
4. *Kadanoff L. P.* - Critical Phenomena. Proc. Int. School Phys. "Enrico Fermi", Course LJ, Acad. Press New York - London, 1971.
5. *Huang K.*, Statistical Mechanics. John and Sons Inc., New York - London, 1963.
6. *Johnson K., Kavoulakis G. M.* - Phys. Rev. Lett. 2001. V. 86. P. 858.

Հ. Ս. Բաբաջանյան, Ս. Ա. Բաբաջանյան

Բոզե-Էյնշտեյնյան կոնդենսացիան $\varepsilon_p = cp^s$ զրգրման սպեկտրով D -չափանի իդեալական Բոզե-գազում կամայական $U(\vec{r})$ պահող պոտենցիալի դաշտում

Ասիմպտոտիկ մեթոդներով ստացվել են Բոզե-Էյնշտեյնյան կոնդենսացիայի (ԲԷԿ) հնարավորության չափանիշը և չափանիշներ, որոնք ցույց են տալիս, որ ԲԷԿ-ը կարող է լինել ցանկացած $v \in [2, \infty)$ կարգի փուլային անցում ($\Phi U v$) $\mu(T)$ քիմիական պոտենցիալի և $E(T)$ լրիվ էներգիայի, ըստ T -ի k -րդ ($k = v - 1$) կարգի ածանցյալների՝ վերջավոր կամ անվերջ թռիչքներով, ընդ որում բոլոր այդ հարցերում որոշիչ դեր է խաղում $\chi = D/s + q_1^{-1} + \dots + q_D^{-1}$ պարամետրը (q_i - $U(\vec{r})$ -ի ասիմպտոտիկ վարքի տրամաչափային ֆունկցիաների աստիճանային ցուցիչներն են նրա մինիմումի կետի մոտ): χ -ի արժեքները կազմում են $\chi_k = k/(k - 1)$ անվերջ հաջորդականություն, որոնք որոշում են ԲԷԿ-ի հնարավորության Δ_χ տիրույթը և այդ տիրույթում յուրաքանչյուր $\Phi U v$ -ի համար համապատասխան $\Delta_{\chi v}$: Ամեն մի $\Delta_{\chi v}$ -ի վրա որոշված են ենթատիրույթներ, ուր $\mu(T)$ -ի և $E(T)$ -ի ածանցյալները (k -րդ կարգի) կամ վերջավոր են կամ անվերջ: Ցույց է տրված χ պարամետրի ունիվերսալությունը՝ «արտաքին դաշտ - բոզոնների համակարգ» ընդլայնված համակարգերը ԲԷԿ-ի փուլային անցումների բնույթով ըստ իդիենտիկության դասերի համակարգման համար:

H. S. Babajanyan, S. A. Babajanyan

Bose-Einstein Condensation of the D -dimensional System of the Ideal Bose-gas with Excitation Spectrum $\varepsilon_p = cp^s$ in the Presence of Trapping Potential with an Arbitrary Profile $U(\vec{r})$

Asymptotical methods are used to derive the criterion of BEC possibility, and the criteria determining the order of phase transition at BEC and indicating that BEC can be a phase transition (PT v) of an arbitrary order $v \in [2, \infty)$ with finite or infinite jumps of the k -th ($k = v - 1$) derivatives of chemical potential $\mu(T)$ and total energy $E(T)$ with regard to T and that all this is being determined by parameter $\chi = D/s + q_1^{-1} + \dots + q_D^{-1}$ (q_i - are the exponents of calibrating functions of asymptotical behavior of $U(\vec{r})$ at the minimum point). Parameter χ takes on an infinite sequence of values ($\chi_k = k/(k - 1)$), setting the Δ_χ interval in which the BEC is possible, and for each PT v $\Delta_{\chi v}$ subintervals of Δ_χ and on each $\Delta_{\chi v}$ there are subintervals where the jumps of $\mu(T)$ and $E(T)$ are either finite or infinite. The universal role of parameter χ in systematization of infinite variety of extended systems “external field-system of bosons” by classes of identical nature of phase transitions at BEC is also shown.