

УДК 539.1

Член-корреспондент НАН РА А. Г. Багдоев, Г. А. Мартirosян

Решение нелинейной оптической задачи для квазимонохроматической волны вблизи каустики в осесимметричном случае

(Представлено 25/II 2004)

Рассматривается осесимметричная задача для квазимонохроматической волны вблизи каустики. В линейном случае лучи имеют огибающую, или каустику, на которой в момент t имеются падающая и отраженная волны (рис. 1,2), пересекающие каустику в точке A , радиус-вектор которой $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(t)$. Как показывает линейное решение для произвольной линейной гиперболической системы уравнений с переменными коэффициентами [1,2] и для волнового уравнения с переменной скоростью волн [3,4], вблизи каустики задача в основном порядке определяется координатами

$$\tilde{x} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{k}^1, \quad \tilde{y} = -(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{N}, \quad (1)$$

где $\vec{r}$ - радиус-вектор точки (x_i) , $\vec{k}^1 = (\alpha_i^1)$, $\vec{k}\omega$ - волновой вектор в точке A , ω - частота волны, $\vec{N}$ - единичный вектор нормали к каустике в точке A , направленный в сторону ее выпуклости, $\tilde{x}$ - эйконал, или время пробега волны от точки A до точки (x_i) .

Вначале рассмотрим линейный дифференциальный оператор

$$\Delta^0(iP_t, -iP_{x_j}, \vec{r})\phi = 0, \quad (2)$$

где согласно (1) в основных порядках малости

$$P_t = \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}, \quad P_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} = \alpha_j^1 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} - N_j \frac{\partial}{\partial \tilde{y}}, \quad \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} = -1 + (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \frac{\partial \vec{k}^1}{\partial t}. \quad (3)$$

Разлагая (2), (3) по степеням малых операторов, оставляя только старшие производные от Φ , т. е. не учитывая действия операторов на переменные коэффициенты, с операторами можно проводить действия, как с числами, и получить, полагая $\Phi = \psi(y_1) e^{i\omega \tilde{x}}$,

$$e^{-i\omega \tilde{x}} \Delta^0 \phi = -\psi \Delta_\omega^0 (x_j - x_j^0) \left(\frac{\partial \alpha_j^1}{\partial t} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} \right) - \frac{1}{2} \Delta_{\vec{\alpha}_i \vec{\alpha}_j}^0 N_i N_j \frac{d^2 \psi}{d\tilde{y}^2}, \quad (4)$$

где согласно уравнению лучей [1]

$$\frac{\partial x_j}{\partial t} = -\frac{\Delta_{\alpha_j}^0}{\omega \Delta_{\omega}^0}, \quad \frac{\partial \alpha_j}{\partial t} = \frac{\Delta_{x_j}^0}{\omega \Delta_{\omega}^0}, \quad \Delta^0 = \Delta^0(-\omega, \alpha_j, \bar{r}_0), \quad \Delta^0 = 0 \quad (5)$$

есть дисперсионное соотношение, индекс при Δ^0 обозначает дифференцирование. Применим теперь полученные соотношения к нелинейной оптической среде, где в осесимметричной задаче имеет место уравнение для электрического поля [1], [5]

$$\bar{E} = -\frac{1}{2} \bar{E}^1 + k\bar{c}, \quad \bar{E}^1 = E^1 \cdot \bar{e}, \quad \Delta E^1 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{ \epsilon_0 + (\epsilon_2 + i\epsilon_1)|E_1|^2 \} E^1, \quad E^1 = E_1^1 e^{i\omega \bar{x}}, \quad (6)$$

где $\bar{e}$ - единичный вектор поляризации волны, $\Delta = [(\partial^2)/(\partial r^2)] + [1/r][(\partial)/(\partial r)] + [(\partial^2)/(\partial x^2)]$, Δ - оператор Лапласа, x - осевая, r - радиальная координаты. Линейное поглощение считается малым и не учтено в (6).

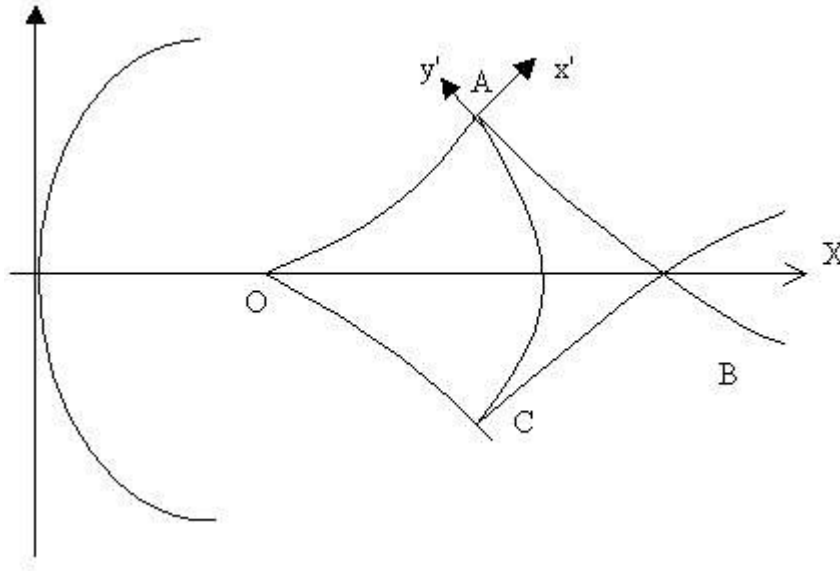


Рис. 1. Случай начальной волны в форме параболоида.

Обозначая через r_0 значения r на зеркале (рис. 1,2), введя функцию U , $E^1 = \sqrt{r_0/r} \cdot U$, можно из (6) для немалых r , соответствующих окрестности каустики вдали от оси x , получить в основных порядках уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\epsilon_0 U) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\epsilon_2 + i\epsilon_1) \frac{r_0}{r} |U|^2, \quad (7)$$

где отброшено малое недифференцируемое слагаемое от U .

Здесь согласно определению (8), (9), (12) $([(\partial\Omega)/(\partial a^2)])_0 = -[(\varepsilon_2 + i\varepsilon_1)/(2\varepsilon_0)]\omega$ есть коэффициент при $a^2 = [(r_0)/r]|\psi|^2$ в нелинейной частоте Ω , $\Omega = \omega + ([(\partial\Omega)/(\partial a^2)])_0 a^2$.

Вводя безразмерные переменные y^* , ψ^* , получим

$$\tilde{y} = \chi^{-[1/3]} y^*, \quad \psi = \mu \psi^* e^{i\varphi_0}, \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{2}(k' + 1) - \frac{\pi}{4}, \quad \chi = \frac{2k^2}{R}, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c_n^2}, \quad (13)$$

где $\chi = [(\lambda_1)/([1/2] \Delta_{\tilde{a}_i \tilde{a}_j} N_i N_j)] = [(2k^2)/R]$, $k = [(\omega)/(c_n)]$,

$$\mu = \sqrt{\mp \frac{\lambda_1 v_1}{\Delta_\omega \left(\frac{\partial \Omega}{\partial a^2} \right)_0 \frac{r_0}{r}}} = 2^{[1/3]} \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} \right)^{[1/2]} R^{-[1/3]} k^{-[1/3]} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{-[1/2]}, \quad v_1 = \chi^{-[1/3]}, \quad (14)$$

где последние соотношения для χ , μ в (14) соответствуют оптической среде, знаки под корнем квадратным соответствуют $([(\partial\Omega)/(\partial a^2)])_0 \lessgtr 0$.

В случае оптической среды в силу (9), (12) $([(\partial\Omega)/(\partial a^2)])_0 < 0$. Подставляя (13), (14) в (9), (10), можно получить для оптической среды уравнение

$$\frac{d^2 \psi^*}{dy^{*2}} - y^* \psi^* + |\psi^*|^2 \psi^* \left(1 + \frac{i\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) = 0. \quad (15)$$

Линейное решение записывается через функцию Эйри [1-6]

$$\psi_0 = e^{i\varphi_0} C v(y^*), \quad C = 2a_1^{[1/12]} A_1 \omega^{-k' - [5/6]}, \quad a_1 = \frac{\chi}{\omega^2}. \quad (16)$$

С учетом (13), записывая (16) вдали от каустики для больших $-y^* > 0$, можно получить решение геометрической оптики

$$\psi_{\text{геом}} = e^{i\varphi_0} C \frac{1}{2} (-\tilde{y})^{-[1/4]} \chi^{-[1/12]} e^{i[(\pi)/4]} e^{-i[2/3](-y^*)^{3/2}}. \quad (17)$$

Для определения C или A через начальную амплитуду волны запишем линейное решение вдали от каустики для однородной среды. Уравнения лучей имеют вид [7]

$$\begin{aligned} x - x_0(\theta) &= c_n(t - t_0 - \tau) \cos \theta, \\ r - r_0(\theta) &= c_n(t - t_0 - \tau) \sin \theta, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\tau = 0$ - фронт волны, $t_0(\theta)$ - момент прихода волны на каустику, $x = x_0(\theta)$, $r = r_0(\theta)$ - уравнение каустики, кривизна которой равна $[1/(c_n t'_0(\theta))] = -[1/R]$. Вблизи каустики для малых $\theta' = \theta - \theta_1$, где θ_1 - значение θ для фиксированного луча, получено [7]

$$\tilde{x} = -\frac{1}{3} t'_0(\theta) \theta'^3 + \tau, \quad \tilde{y} = \frac{1}{2} c_n t'_0(\theta) \theta'^2. \quad (19)$$

Решение геометрической оптики записывается в виде

$$\psi_{\text{геом}} = \frac{c^0}{(-i\omega)^{k'+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{c_n t_1}} \sqrt{\frac{1}{2k_1}} e^{-i[2/3](\tilde{y})^{3/2}}, \quad t_1 = t'_0(\theta) \theta', \quad (20)$$

где $[(c^0)/((-i\omega)^{k'+1})]$ - значение начальной амплитуды волны, $2k_1$ - начальная кривизна меридианального сечения волны или зеркала. В силу (19), (20)

$$(-\tilde{y})^{-[1/4]} = 2^{1/4} c_n^{-[1/4]} \frac{1}{\sqrt{t_1}} \left(\frac{R}{c_n} \right)^{1/4}, \quad C = \frac{c^0 2^{5/6}}{\omega^{k'+1}} \omega^{1/6} \frac{1}{\sqrt{2k_1}} R^{-[1/3]} c_n^{-[1/6]}. \quad (21)$$

Учитывая (14), получим

$$\frac{C}{\mu} = \frac{c^0}{\omega^{k'+1}} \cdot 2^{1/2} \omega^{1/2} \sqrt{\frac{1}{2k_1}} c_n^{-[1/2]} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}} \sqrt{\frac{r_0}{r}}. \quad (22)$$

Таким образом характерный множитель в линейном решении (13), (22) не зависит от $[1/R]$ и имеет четкое значение. В (22) $r = r(t)$ есть значение r на каустике в точке А.

Для определения решения уравнения Пенлеве, получаемого из (15) при $\varepsilon_1 = 0$, нужно поставить граничные условия, взятые из линейного решения (16) в некоторых точках, например, $y^* = \pm 5$, $\psi^*(\pm 5) = [C/(\mu)]v(\pm 5)$. В силу сложности граничной задачи задавались начальные условия

$$\psi^*(5) = \frac{C}{\mu} v(5), \quad \left. \frac{d\psi^*}{dy^*} \right|_{y^*=5} = \frac{C}{\mu} v'(5) \quad (23)$$

и проводился расчет уравнения (15) при $\varepsilon_1 = 0$

$$\frac{d^2 \psi^*}{dy^{*2}} - y^* \psi^* + \psi^{*3} = 0 \quad (24)$$

для значений $[C/(\mu)] = 0.4; 0.5; 0.6$ (решение приведено на рис. 3), причем условие $\psi^*(-5) = [C/(\mu)]v(-5)$ удовлетворено достаточно точно, полученное решение годится для начальной сходящейся волны в форме параболоида с уравнением $x_1 = k_1 r_1^2$ (рис. 1), причем $2k_1$ есть кривизна меридианального сечения в начальной точке $r_1 = 0$. Расчет для начального условия (23), взятого в точке $y^* = -5$, не дал удовлетворительного выполнения граничных условий в точке $y^* = 5$, поэтому в работе рассмотрено условие (23), взятое в точке $y^* = 5$. Линейное решение дает такую же картину кривой, как и на рис. 3, но с несколько меньшими по модулю ординатами.

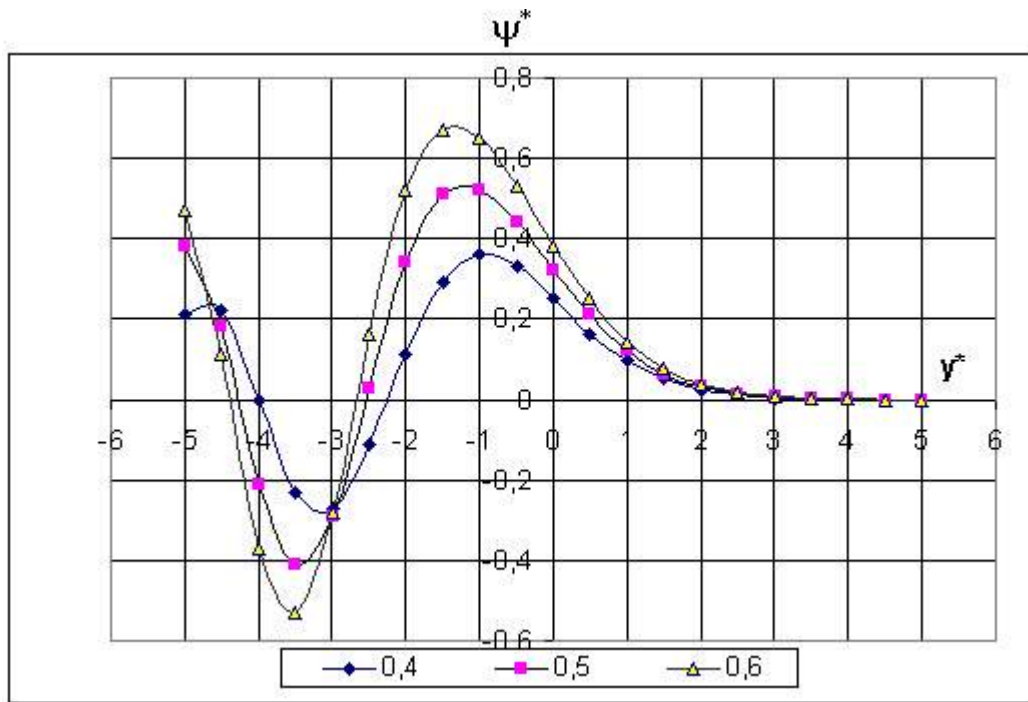


Рис. 3. Нелинейное решение для квазимонохроматической волны вблизи каустики.

В случае сферического зеркала радиуса R_0 (рис. 2) при наличии параллельного оси x пучка лучей, падающих на зеркало, для отраженных от зеркала лучей имеем

$$x = x_0 - \bar{x}, x_0 = R_0 \cos \bar{\theta}, r = r_0 - \bar{r}, r_0 = R_0 \sin \bar{\theta}, \bar{x} = r' \cos 2\bar{\theta}, \bar{r} = r' \sin 2\bar{\theta}, \quad (25)$$

где x_0, r_0 есть координаты точек пересечения лучей со сферическим зеркалом, $r' = c_n(t - [(R_0 \cos \bar{\theta})]/(c_n)]$. Соотношения (25) можно записать в виде

$$\frac{x - R_0 \cos \bar{\theta}}{\cos 2\bar{\theta}} = \frac{r - R_0 \sin \bar{\theta}}{\sin 2\bar{\theta}}.$$

Уравнения огибающей этих лучей, или каустики, имеют вид:

$$x \sin 2\bar{\theta} = r \cos \bar{\theta} + R_0 \sin \bar{\theta}, \quad x \cos 2\bar{\theta} + r \sin 2\bar{\theta} = \frac{R_0}{2} \cos \bar{\theta}. \quad (26)$$

Характерные точки для полученной каустики

$$\bar{\theta} = 0, x = \frac{R_0}{2}, r = 0, \bar{\theta} = \frac{\pi}{4}, r = \frac{R_0 \sqrt{2}}{4}, x = \frac{R_0 \sqrt{2}}{2}, \bar{\theta} = \frac{\pi}{2}, x = 0, r = R_0. \quad (27)$$

Каустика изображена на рис. 2. В отличие от случая сходящейся начальной волны в форме параболоида (рис. 1), при котором каустики [8] выражаются уравнением

$$y = \mp \frac{4\sqrt{k_1}}{3\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2k_1} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (28)$$

и расположены после фокальной точки, в случае сферического зеркала каустика (26) расположена до фокуса $y = 0, x = R_0$. Уравнение каустики для сферического зеркала впервые получено академиком П.М. Геруни [8]. Для случая параболоида до каустики (28) имеются фокальные точки на оси x [9]. Однако решение вблизи каустики (28) вдали от оси x будет по-прежнему даваться (24), (22).

Институт механики НАН РА

Литература

1. Багдоев А.Г. Распространение волн в сплошных средах. Ереван. 1981. 307 с.
2. Ludwig D. - Commun. pure Appl. Math. 1966. V. 19. N6. P. 215.
3. Кравцов Ю.А. - Изв. высших учебных заведений. Радиофизика. 1964. В. 4.
4. Газарян Ю.Л. В сб.: Динамическая теория распространения сейсмических волн. ЛГУ. 1961. Т. 5. С. 73-114.
5. Мартиросян Г.А. - Информационные технологии и управление. 2002. N4. С. 86-93.
6. Багдоев А.Г., Саакян С.Г. - Акустический журнал. 2000. Т. 46. N3. С. 299-305.
7. Багдоев А.Г. - Изв. АН АрмССР. Техн. науки. 1967. Т. 20. N3. С. 26-29.
8. Геруни П.М. Автореф. канд. дис. 1961. М.
9. Фридлендер Ф. Звуковые импульсы. М. ИЛ. 1962. 232 с.

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ա. Գ. Բագդոև, Հ. Ա. Մարտիրոսյան

**Ոչ գծային օպտիկական խնդրի լուծումը կաուստիկայի մոտ
քվադրանոթորոմատիկ ալիքների համար առանցքասիմետրիկ դեպքում**

Դիտարկվում է քվադրանոթորոքատիկ ալիքի վարքը օպտիկական ոչ գծային միջավայրում կաուստիկայի մոտ առանցքասիմետրիկ դեպքում: Դուրս է բերված ոչ գծային հավասարումը և տրված է նրա լուծումը:

Corresponding Member of NAS RA A.G. Bagdoyev, H.A. Martirosyan

**Solution of Non-linear Optic Problem for Quasymonochromatic Wave Near
Caustic in Axialsymmetric Case**

The non-linear solution of behaviour of quasymonochromatic wave near caustic in axialsymmetric case is obtained. The non-linear equations near caustic are derived and their analytic and numerical solutions are given.