УДК 519.1

Р. Р. Камалян, П. А. Петросян

О равновесных реберных раскрасках регулярных графов

(Представлено академиком Ю.Г. Шукуряном 16/II 2005)

В работе рассматриваются неориентированные графы без кратных ребер и петель. Не определяемые в работе понятия и обозначения можно найти в [1-3].

Множество вершин графа G обозначается через V(G), множество ребер - E(G), максимальная из степеней вершин G – $\Delta(G)$, хроматический класс - $\chi'(G)$. Для вершины $v \in V(G)$ определим множество $J(v) \subseteq V(G)$ следующим образом: $J(v) = \{ u \in V(G) | (u,v) \in E(G)\}$.

Функция $f:E(G) \to N$ называется правильной реберной раскраской графа G, если для любых двух смежных ребер $e_1 \in E(G)$ и $e_2 \in E(G)$ $f(e_1) \neq f(e_2)$.

Правильную реберную раскраску f графа G назовем равновесной t-раскраской, если для каждого i, $1 \le i \le t$, существует хотя бы одно ребро $e_i \in E(G)$, для которого $f(e_i) = i$, и для любых двух вершин

$v_1 \in V(G)$, $v_2 \in V(G)$ $\sum_{u \in J(v_1)} f((v_1, u)) = \sum_{u \in J(v_2)} f((v_2, u))$.

Для $t \ge 1$ через $(\mathcal{M})_t$ обозначим множество всех графов, для которых существует равновесная t-раскраска. Обозначим: $(\mathcal{M}) \equiv \bigcup_{t \ge 1} (\mathcal{M})_t$. Для графа $G \in (\mathcal{M})$ обозначим через $\omega(G)$ и $\Omega(G)$, соответственно, наименьшее и наибольшее значение t , при котором $G \in (\mathcal{M})_t$.

Ясно, что для $G \in (\mathcal{M})$ $\omega(G) \ge \Delta(G)$, $\Omega(G) \le |E(G)|$. Отсюда и из теоремы Турана [1] следует

Утверждение 1. *Если* $G \in (\mathcal{M})$ *и* G *не имеет треугольников, то* $\Omega(G) \le \le \lfloor [(|V(G)|^2)/4] \rfloor$.

Лемма. *Если* G *регулярный граф и* $\chi'(G) = \Delta(G)$, *то* $G \in (\mathcal{M})$ и $\omega(G) = \Delta(G)$.

Доказательство. Рассмотрим правильную реберную раскраску f графа G в цвета $1,2,\ldots,\Delta(G)$. Так как G регулярный граф, то f является равновесной $\Delta(G)$ - раскраской. Отсюда вытекает, что $G \in (\mathcal{M})$ и $\omega(G) \le \Delta(G)$.

Лемма доказана.

Следствие 1. *При* $n \ge 2$ $C_{2n} \in (\mathcal{M})$, $\omega(C_{2n}) = \Omega(C_{2n}) = 2$.

Следствие 2. *При* $n \ge 1$ $K_{2n} \in (\mathcal{M})$, $\omega(K_{2n}) = 2n - 1$.

Следствие 3. *При* $n \ge 1$ $Q_n \in (\mathcal{M})$, $\omega(Q_n) = n$

Среди регулярных графов G с $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ существуют графы, удовлетворяющие условию $G \in (\mathcal{M})$, и существуют графы, удовлетворяющие условию $G \notin (\mathcal{M})$.

Утверждение 2. *При* $n \geq 2$ $C_{2n+1} \notin (\mathfrak{M})$.

Утверждение 3. *Если* G *есть граф Петерсена [1], то* $G \in (\mathfrak{M})$.

Доказательство. Пусть $V(G) = \{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,y_1,y_2,y_3,y_4,y_5\}$, $E(G) = \{(x_1,x_2), (x_2,x_3), (x_3,x_4), (x_4,x_5), (x_5,x_1), (y_1,y_3), (y_3,y_5), (y_5,y_2), (y_2,y_4), (y_4,y_1), (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3), (x_4,y_4), (x_5,y_5)\}$. Определим раскраску f ребер графа G следующим образом:

$f((x_1,x_2)) = 7$, $f((x_2,x_3)) = 2$, $f((x_3,x_4)) = 3$, $f((x_4,x_5)) = 6$, $f((x_5,x_1)) = 1$,

$f((y_1,y_3)) = 3$, $f((y_3,y_5)) = 2$, $f((y_5,y_2)) = 5$, $f((y_2,y_4)) = 4$, $f((y_4,y_1)) = 5$,

$f((x_1,y_1)) = 2$, $f((x_2,y_2)) = 1$, $f((x_3,y_3)) = 5$, $f((x_4,y_4)) = 1$, $f((x_5,y_5)) = 3$.

Нетрудно убедиться, что f является равновесной 7-раскраской ребер графа G.

Утверждение 3 доказано.

Теорема 1. *При* $n \geq 1$

1. $K_{n,n} \in (\mathfrak{M})$;

2. $\omega(K_{n,n}) = n$;

3. $\Omega(K_{n,n}) = \begin{cases} n^2, & \text{если} \quad n \neq 2, \\ 2, & \text{если} \quad n = 2. \end{cases}$

Доказательство. Так как $K_{n,n}$ при любом $n \in N$ является регулярным графом, удовлетворяющим равенству $\chi'(K_{n,n}) = \Delta(K_{n,n}) = n$, то из леммы вытекают утверждения 1 и 2 доказываемой теоремы.

Утверждение 3 доказываемой теоремы при $n \leq 2$ очевидно. Докажем, что оно верно при $n \geq 3$. Заметим, что каждому магическому [2] квадрату порядка n можно сопоставить равновесную n^2-раскраску ребер графа $K_{n,n}$. Так как для любого $n \geq 3$ существует [2] магический квадрат порядка n, то при $n \geq 3$ $\Omega(K_{n,n}) \geq n^2 = |E(K_{n,n})|$.

Теорема 1 доказана.

Следствие 4. *Для графов* $K_{n,n}$ *при* $n \geq 3$ *оценка утверждения 1 достижима.*

Теорема 2. *При* $m \geq 2$ $\Omega(K_{4m}) \geq \Omega(K_{2m}) + 4m^2$.

Доказательство. Пусть $V(K_{4m}) = \{x_1,x_2,\ldots,x_{4m}\}$.

Пусть G_1 есть подграф графа K_{4m}, порожденный вершинами $x_1,x_2,\ldots,x_{2m}$. Ясно, что G_1 изоморфен графу K_{2m} и, следовательно, ввиду следствия 2, существует равновесная $\Omega(K_{2m})$-раскраска f_1 ребер графа G_1.

Пусть G_2 есть подграф графа K_{4m}, порожденный вершинами $x_{2m+1},x_{2m+2},\ldots,x_{4m}$.

Определим подграф G_3 графа K_{4m} следующим образом:

$$V(G_3) \equiv V(K_{4m}); \quad E(G_3) \equiv E(K_{4m}) \backslash (E(G_1) \cup E(G_2)).$$

Легко видеть, что G_3 изоморфен полному двудольному графу $K_{2m,2m}$ и, следовательно, ввиду теоремы 1, $G_3 \in (\mathfrak{M})$. Пусть f_2 есть равновесная $4m^2$-раскраска ребер графа G_3.

Определим раскраску F ребер графа K_{4m}.

Для $i = 1,2,\ldots,4m$ и $j = 1,2,\ldots,4m$ при $i \neq j$ положим:

$$F((x_i,x_j)) = \begin{cases} f_1((x_i,x_j)), & \text{если } 1 \le i \le 2m, \quad 1 \le j \le 2m; \\ f_1((x_{i-2m},x_{j-2m})), & \text{если } 2m+1 \le i \le 4m, \quad 2m+1 \le j \le 4m; \\ f_2((x_i,x_j)) + \Omega(K_{2m}), & \text{если } 1 \le i \le 2m, \quad 2m+1 \le j \le 4m. \end{cases}$$

Легко видеть, что F является равновесной $(4m^2 + \Omega(K_{2m}))$-раскраской ребер графа K_{4m}.

Теорема 2 доказана.

Следствие 5. *При* $m \ge 2$ $\Omega(K_{2^m}) \ge [(2^{2m} - 7)/3]$.

Доказательство. По теореме 2

$$\Omega(K_2m) \ge \Omega(K_2m-1) + 2^{2(m-1)}$$

$$\Omega(K_2m-1) \ge \Omega(K_2m-2) + 2^{2(m-2)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Omega(K_8) \ge \Omega(K_4) + 2^{2\cdot 2}.$$

Складывая эти неравенства, получим: $\Omega(K_{2^m}) \ge \Omega(K_4) + \sum_{i=2}^{m-1} 2^{2i} \ge 3 + \sum_{i=2}^{m-1} 2^{2i} = \dfrac{2^{2m}-7}{3}$.

Следствие 5 доказано.

Следствие 6. *При* $m \ge 2$ $\Omega(K_{4m}) \ge 4m^2 + 2m - 1$.

Утверждение 4. *Для* $p \ge 2$ *существует граф* $G \in (\mathfrak{M})$, *для которого* $\Omega(G) \ge |V(G)| + p$.

Доказательство. По данному $p \ge 2$ выберем m, удовлетворяющее неравенству $4m^2 - 2m - 1 \ge p$. Положим $G \equiv K_{4m}$. По следствию 6 $\Omega(G) \ge 4m^2 + 2m - 1 = 4m^2 - 2m - 1 + |V(G)| \ge |V(G)| + p$.

Утверждение 4 доказано.

Утверждение 5. *Для* $p \ge 3$ *существует граф* $G \in (\mathfrak{M})$, *для которого* $\Omega(G) - \omega(G) \ge p$.

Доказательство. По данному $p \ge 3$ выберем m, удовлетворяющее неравенству $4m^2 - 2m \ge p$. Положим $G \equiv K_{4m}$. Из следствий 2 и 6 получим: $\Omega(G) \ge 4m^2 + 2m - 1 = 4m^2 - 2m + 4m - 1 \ge p + \omega(G)$.

Утверждение 5 доказано.

Настоящее исследование поддержано целевой программой 04-10- 31 РА.

Институт проблем информатики и автоматизации НАН РА

Литература

1. *Harary F.* Graph Theory. Addison-Wesley. Reading. MA. 1969.
2. *Постников М.М.* Магические квадраты. М. Наука. 1964.
3. *Визинг В.Г.* Хроматический класс мультиграфа. Кибернетика. 1965. N3. С. 29-39.

Ռ. Ռ. Քամալյան, Պ. Ա. Պետրոսյան

Համասեռ գրաֆների հավասարակշիռ կողային ներկումների մասին

Որոշ դասերի համասեռ գրաֆների վերաբերյալ ուսումնասիրված են գոյության պայման-ներ այնպիսի ճիշտ կողային ներկումների համար, որոնցում հավասար են կամայական երկու գագաթներին ինցիդենտ կողերի գույների գումարները, և գնահատականներ են ստացված այդ-պիսի ներկման մեջ օգտագործվող գույների հնարավոր թվի համար:

R. R. Kamalian, P. A. Petrosyan

On Equiweight Edge Colourings of Regular Graphs

Conditions of existence of proper edge colourings in which the sum of colours of edges incident with any vertex is the same for all vertices are investigated for regular graphs of some kinds, and estimates are found for the possible number of colours in such colourings.