УДК 517.538.5

А. З. Мартиросян

Лакунарные аналоги теоремы Рунге и многократно T-универсальные функции, представимые лакунарными степенными рядами, в пространстве голоморфных функций

(Представлено академиком Н. У. Аракеляном 22/I 2005)

1. Для компактного множества K из конечной комплексной плоскости C обозначим через A (K) Банахово пространство из всех непрерывных на K и голоморфных на его внутренности комплексно значных функций с нормой $||f|| = \sup\{|f(z)| : z \in K\}$. Обозначим через M семейство всех компактных множеств $K \subset C$ со связным дополнением $C \setminus K$. Для множества $E \subset C$ будем обозначать ∂E ее границу. Пусть N, Z будут, как обычно, множества из всех натуральных и целых чисел, соответственно; пусть также $N_0 = N \cap \{0\}$. Для последовательности $Q = \{q_n\}_{n\in N_0}$ из N_0 положим n(t) - количество ее членов из отрезка и определим плотность, верхнюю плотность и минимальную плотность для Q, соответственно, следующим образом:

$$\Delta(Q) = \lim_{t\to\infty} \frac{n(t)}{t}, \quad \overline{\Delta}(Q) = \lim_{t\to\infty} \sup \frac{n(t)}{t}, \quad \Delta_{\min}(Q) = \underline{\lim}_{\tau\to 1-0}\ \underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{n(t) - n(\tau t)}{t(1-\tau)}.$$

Пусть функция f голоморфна в односвязной области $G \subset C$. Последовательность операций $\{L^j\}_{j\in Z}$ определим следующим образом: для $z \in G$ и $j \in N_0$ положим $L^0 f(z) = f(z)$, $L^1 f(z) = (zf(z))'$, $L^j f(z) = L^1(L^{j-1} f(z))$ при j = 2, 3, …; для $z \in G$ и j = −1, −2, … положим

$$L^j f(z) = \begin{cases} z^{-1} \cdot \int\limits_0^z L^{j+1} f(t)dt, & \text{если } 0 \in G \\ z^{-1} \cdot \int\limits_{z_0}^z L^{j+1} f(t)dt, & \text{если } 0 \notin G,\ z_0 \in G, \end{cases}$$

где интеграл берется по любой спрямляемой дуге из G, соединяющей, соответственно, 0 или z_0 с z.

Пусть $O \subset C$ - открытое множество, $H(O)$ - совокупность всех голоморфных на O функций. Рассмотрим последовательность $\{K_n\}_{n\in N}$ компактных подмножеств, исчерпывающих O, т.е. $K_n \subset K_{n+1}$ и $\cup_{n\in N} K_n = O$. Для функции $h \in H(O)$ и любого $n \in N$ положим

$$d_n(h) = \max_{z\in K_n} |h(z)|, \quad d(h) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(h)}{2^n(1 + d_n(h))}.$$

Если $h_1,h_2 \in H(O)$, то определим расстояние между ними как $\rho(h_1,h_2) = d(h_1 - h_2)$. Множество $H(O)$, снабженное такой метрикой, есть пространство Фреше; для последовательности $\{h_k\}_{k\in N} \subset H(O)$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \rho(h_k,h) = 0$$

тогда и только тогда, когда $\{h_k\}_{k\in N}$ сходится к h локально-равномерно в O. Итак, ρ - естественная метрика, индуцирующая локально-равномерную сходимость в $H(O)$.

Для заданных открытого множества $O \subset C$, $0 \in O$, и подпоследовательности $Q \subset N_0$ обозначим через $H_Q(O)$ подпространство из всех функций $\varphi \in H(O)$, представимых в некоторой окрестности нуля лакунарным степенным рядом.

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_z z^n, \quad \varphi_n = 0 \text{ при } \quad n \notin Q.$$

Определение 1. *Пусть* $O \subset C$ - *произвольное открытое множество. Функция* $\varphi \in H(O)$ *называется* T-*универсальной на* O *("универсальной относительно трансляций"), если она имеет следующее свойство: для всех* $K \in M$, *для всех* $f \in A(K)$ *и для всех* $\varsigma \in \partial O$ *существуют последовательности* $\{a_n\}_{n\in N}$ и $\{b_n\}_{n\in N}$ *такие, что* $a_n z+b_n \in O$ *для всех* $z \in K$ *и всех* $n \in N$, *последовательность* $\{a_n z + b_n\}_{n\in N}$ *сходится к* ζ *и последовательность* $\{\varphi(a_n z + b_n)\}_{n\in N}$ *сходится к* $f(z)$ *равномерно на* K.

Определение 2. *Пусть* $O \subset C$, $0 \in O$ - *произвольное открытое множество,* $Q \subset N_0$ - *произвольная подпоследовательность. Функция* $\varphi \in H(O)$ *называется многократно* T-*универсальной относительно последовательности операций* $\{L^j\}_{j\in Z}$, *если при любом фиксированном* $j \in Z$ *функция* $L^j\varphi(z) \in H_Q(O)$ *и* T-*универсальна.*

Множество всех универсальных по определению 2 функций обозначим через $U_Q(O)$. Это множество исследовалось в [1, 2], а именно: при тех или иных предположениях относительно

O и Q было доказано, что $U_Q(O) \neq \varnothing$. В данной работе множество $U_Q(O)$ изучается количественно: оказывается, что $U_Q(O)$ плотно в $H_Q(O)$ при весьма общих предположениях на O и Q. При этом существенно используются лакунарные аналоги теоремы К. Рунге об аппроксимации многочленами.

Отметим, что похожие вопросы конструирования многократно универсальных функций без контроля лакун их степенных рядов исследовались В. Лухом (см. [3, 4]). Отметим также, что подробную информацию о развитии теории универсальных функций и полную библиографию вплоть до 1999 г. можно найти в обзоре К. Гроссе-Эрдмана [5]. Более поздние примыкающие исследования представлены, например, в [6-12].

2. Для заданной подпоследовательности $Q \subset N_0$ обозначим через P_Q множество всех лакунарных многочленов, содержащих только степени $\{z^n,\ n \in Q\}$.

Теорема 1. *Пусть* $Q(0 \in Q)$ - *подпоследовательность из* N_0 *с плотностью* $\Delta(Q) = 1$ *и* $O \neq C$ - *открытое множество с односвязными компонентами,* $0 \in O$. *Тогда* P_Q *плотно в* $H_Q(0)$.

Теорема 2. *Пусть* $Q(0 \in Q)$ - *подпоследовательность из* N_0 *с верхней плотностью* $\overline{\Delta}(Q) = 1$, $O \neq C$ - *открытое множество с односвязными компонентами, причем* $0 \in O$ *и содержащая* 0 *компонента является звездою относительно точки* 0. *Тогда* P_Q *плотно в* $H_Q(O)$.

Доказательство теорем 1, 2. Пусть $\{K\}_1^{\infty}$ исчерпывающая O последовательность компактных подмножеств, т.е. $K_n \subset K_{n+1}$ и $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = O$. В предположениях теорем 1, 2 подмножества K_n можно выбрать так, чтобы $0 \in K$ и K_n имело связное дополнение $C \setminus K_n$ $(n \in N)$. Более того, в случае теоремы 2 можно считать, что для каждого K_n содержащая 0 ее компонента является звездою относительно точки 0.

Достаточно доказать, что любая функция из $H_Q(K_n)$ приближается равномерно на K_n многочленами из P_Q. Однако это утверждение в случае теоремы 1 следует из леммы работы [7], а в случае теоремы 2 - из леммы работы [8]. Теоремы 1, 2 доказаны.

Теоремы 1, 2 являются лакунарными аналогами аппроксимационной теоремы К. Рунге. Частный случай теоремы 1, когда O-односвязная область, совпадает с одним результатом Кореваара и Диксона (см. [13]).

3. Теорема 3. *Пусть* Q - *подпоследовательность из* N_0 *с плотностью* $\Delta(Q) = 1$ *и* $O \neq C$ - *открытое множество с односвязными компонентами,* $0 \in O$. *Тогда множество* $U_Q(O)$ *плотно в* $H_Q(O)$.

Доказательство. 1. Согласно теореме 3 из [2] имеем $U_Q(O) \neq \varnothing$. Пусть φ - произвольная функция из $U_Q(O)$.

a) Отметим сперва, что множество $U_Q(O)$ содержит также функцию $\gamma\varphi$, где $\gamma \neq 0$ - произвольная постоянная.

b) Убедимся теперь, что $U_Q(O)$ содержит также функцию $\varphi_p := \varphi + p$, где p - произвольный многочлен из P_Q. В самом деле, пусть заданы произвольные $j \in Z$, граничная точка $\varsigma \in \partial O$, компактное множество $K \in M$ и функция $f \in A(K)$. Выберем $L^j\varphi$ для φ на O так, чтобы $L^j\varphi_p(z) = L^j\varphi(z) + L^jp(z)$ при $z \in O$ (при $j \in N_0$ выполнение этого условия очевидно).

Предположим сперва, что $\varsigma \neq \infty$. Так как $\varphi \in U_Q(O)$, то существуют последовательности $\{a_n\}_1^\infty$ и $\{b_n\}_1^\infty$ с $a_n \to 0$, $b_n \to \zeta$, при $n \to \infty$ такие, что $a_nz + b_n \in O$ для всех $z \in K$ и $n \in N$, а последовательность $\{L^j\varphi(a_nz + b_n)\}_1^\infty$ сходится к $f(z) - L^jp(\varsigma)$ равномерно на K. Отсюда вытекает, что последовательность $\{L^j\varphi_p(a_nz + b_n)\}_1^\infty$ сходится к f(z) равномерно на K, т.е. $\varphi_p \in U_Q(O)$.

Предположим теперь, что $\varsigma = \infty$. Тогда можем выбрать последовательность $\{\varsigma_m\}$ с $\varsigma_m \in \partial O \cap C$ и $\varsigma_m \to \infty$ при $m \to \infty$. Для каждого $m \in N$ существуют последовательности $\{a_n^{(m)}\}_{n\in N}$ и $\{b_n^{(m)}\}_{n\in N}$ с $a_n^{(m)} \to 0$, $a_n^{(m)} \to \varsigma_m$ при $n \to \infty$ такие, что $a_n^{(m)}z + b_n^{(m)} \in O$ для всех $z \in K$ и $n \in N$, а последовательность $\{L^j\varphi(a_n^{(m)z} + b_n^{(m)})\}_1^\infty$ сходится к $f(z) - L^jp(\varsigma_m)$ равномерно на K. Для каждого $m \in N$ найдется $n_m > m$ ($n_m \in N$) такое, что для $\alpha_m := a^{(m)}_{n_m}$, $\beta_m := b^{(m)}_{n_m}$ одновременно будут выполняться следующие условия:

$$|\alpha_m| < \frac{1}{m}, \qquad |\beta_m - \varsigma_m| < \frac{1}{m},$$

$$\max_K |L^jP(\alpha_mz + \beta_m) - L^j(\varsigma_m)| < \frac{1}{m},$$

$$\max_K |L^j\varphi(\alpha_mz + \beta_m) - f(z) + L^j\varphi(\varsigma_m)| < \frac{1}{m}.$$

Очевидно, что $\alpha_m \to 0$, $\beta_m \to \varsigma = \infty$ при $m \to \infty$ и последовательность $\{L^j\varphi_p(\alpha_mz + \beta_m)\}_1^\infty$ сходится к f(z) равномерно на K. Поэтому $\varphi_p \in U_Q(O)$.

2. Чтобы доказать теорему 3, нужно показать, что для каждой функции $F \in H_Q(O)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует T-универсальная функция $\varphi \in U_Q(O)$, для которой $\rho(\varphi,F) < \varepsilon$. Если взять произвольную функцию $\varphi_0 \in U_Q(O)$, то очевидно, что $\lim_{t\to 0} d(t\varphi_0) = 0$. Поэтому можно выбрать постоянную $\gamma > 0$ так, чтобы $d(\gamma\varphi_0) < [(\varepsilon)/2]$. Согласно теореме 1 существует последовательность $\{P_k\}$ многочленов из P_Q, которая сходится к F локально-равномерно на O. Значит, найдется многочлен $p \in P_Q$ с $\rho(p,F) < \varepsilon/2$. По шагу 1 функция $\varphi(z) := \gamma\varphi_0(z) + p(z)$ содержится в $U_Q(O)$ и удовлетворяет оценке

$$\rho(\varphi,F) = \rho(\gamma\varphi_0 + \rho,F) \leq d(\gamma\varphi_0) + \rho(\rho,F) < \varepsilon.$$

Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Пусть* Q - *подпоследовательность из* N_0 *с верхней плотностью* $\overline{\Delta}(Q) = 1$, $O \neq C$ - *открытое множество с односвязными компонентами, причем* $0 \in O$ *и содержащая* 0 *компонента является звездою относительно точки* 0. *Тогда множество* $U_Q(O)$ *плотно в* $H_Q(O)$.

Для случая круга $D_R = \{z : |z| < R\}$, где $0 < R < \infty$, имеем следующий результат.

Теорема 5. *Пусть* Q - *подпоследовательность из* N_0 *с минимальной плотностью* $\Delta_{min}(Q) > 0$. *Тогда множество* $U_Q(D_R)$ *плотно в* $H_Q(D_R)$.

Теоремы 4, 5 доказываются точно так же, как теорема 3. Различие в докозательстве теоремы 4 состоит в том, что вместо теоремы 1 нужно использовать теорему 2, а вместо теоремы 3 из [2] - соответствующий аналогичный результат. Что касается теоремы 5, то для ее доказательства вместо теоремы 3 из [2] надо применить теорему 2 из [7] (плотность P_Q в $H_Q(D_R)$ очевидна, поскольку в D_R частичные суммы любого степенного ряда с центром в нуле сходятся к сумме этого ряда локально равномерно в D_R).

Ереванский государственный университет

Литература

1. *Мартиросян В.А., Мартиросян А. З.* - Изв. НАН Армении. 2004. Математика. Т. 39. N3.
2. *Мартиросян В.А., Мартиросян А. З.* - ДНАН Армении. 2005. Т. 105. N1. С. 17-20.
3. *Luh W.* - Complex Variables. 1996. V. 31. P. 87-96.
4. *Luh W.* - J. Approxim. Theory. 1997. V. 89. P. 135-155.
5. *Grosse-Erdmann K.G.* - Bull. Amer. Math. Soc. 1999. V. 36. P. 345-381.
6. *Luh W., Martirosian V. A., Muller J.* - Indagationes Mathem. (N.S.) 1998. V. 9. P. 529-536.
7. *Luh W., Martirosian V.A., Muller J.* - Acta Sci. Math. (Szeged). 1998. V. 64. P. 67-79.
8. *Luh W., Martirosian V.A., Muller J.* - Journal of Approxim. Theory. 2002. V. 114. P. 201-213.
9. *Gharibyan T., Luh W., Muller J.* - Analysis. 2003. V. 23. P. 199-214.
10. *Gharibyan T., Luh W.* - Annales Univ. Sci. Budapest. Sect.Comp. 2003. V. 22. P. 113-126.
11. *Гарибян Т., Лу В.* - Изв. НАН Армении. Математика. 2003. Т. 38. N4. С. 51-64.
12. *Шилингс Б.* - Изв. НАН Армении. Математика. 2003. Т. 38. N4. С. 85-94.
13. *Dixon M., Korevaar J.* - Proc. Kon. Neder. Akad. Wetensch. 1977. V. A80. N3. P. 176-194.

Ա. Զ. Մարտիրոսյան

Ռունգեի թեորեմի լակունար նմանակներ և լակունար աստիճանային շարքերով ներկայացվող բազմապատիկ T-ունիվերսալ ֆունկցիաներ հոլոմորֆ ֆունկցիաների տարածության մեջ

Հոդվածում հետազոտվում են լակունար աստիճանային շարքերով ներկայացվող բազմապատիկ T-ունիվերսալ ֆունկցիաներ: Ընդհանուր ենթադրությունների դեպքում հոլոմորֆության տիրույթի նկատմամբ ապացուցված է, որ այդպիսի ֆունկցիաների բազմությունը խիտ է համապատասխան հոլոմորֆ ֆունկցիաների տարածությունում (թեորեմներ 3-5): Ապացույցները հենվում են նոր արդյունքների վրա՝ լակունար բազմանդամներով հավասարաչափ մոտավորության հնարավորության մասին:

A. Z. Martirosyan

Lacunary Analogs of the Runge Theorem and Multiply T-universal Functions Representable by Lacunary Power Series in the Space of Holomorphic Functions

In this paper multiply T-universal functions representable by lacunary power series are investigated. Under general assumptions on a domain of holomorphi it is proved that the set of all such type functions is dense in corresponding subspace of holomorphic functions (theorems 3-5). The proofs are based on new results on possibility of uniform approximation by lacunary polynomials.