УДК 517.232

Армен А. Вагаршакян

О представлении функций пространства ReH_1

(Представлено академиком А.А. Талаляном 8/XII 2004)

Пусть ReH_1 - пространство, состоящее из граничных значений действительных частей функций пространства Харди H_1, определённого в верхней полуплоскости. ReH_1 является банаховым пространством с нормой

$$\|f\|_{\mathrm{ReH}_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx + \int_{-\infty}^{+\infty} |Hf(x)|dx,$$

где через $Hf(x)$ обозначено преобразование Гильберта функции $f(x)$, т.е.

$$Hf(x) = \mathrm{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{x-t} dt.$$

Известно, что ReH_1 - собственное подпространство $L_1(R)$. Данная статья посвящена задаче представления функций ReH_1. Для формулировки основных результатов приведём следующие определения.

Назовём функцию φ, принадлежащую пространству $L_\infty(R)$, атомом, если существует интервал I такой, что

1. $\mathrm{supp}\ \varphi \subset I$;

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 0$;

3. $||\varphi||_\infty \le [1/(|I|)]$,

где через $|I|$ обозначена длина интервала I.

Функция φ, удовлетворяющая следующему дополнительному условию

4. $|\varphi(x)| = [1/(|I|)]$ п.в., $x \in I$,

будет называться специальным атомом.

Следующая теорема доказана Ч. Фефферманом (см. [1]).

Теорема (Ч. Фефферман). *Пространство* ReH_1 *совпадает с множеством функций, допускающих представление*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \varphi_k(x) \tag{1}$$

с дополнительным условием на коэффициенты

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |c_k| < +\infty, \tag{2}$$

где $\varphi_k(x)$ - *атомы, а ряд (1) сходится в пространстве* ReH_1.

При этом

$$c\|f\|_{\mathrm{ReH}_1} \le \inf \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \le C\|f\|_{\mathrm{ReH}_1},$$

где inf *берётся по всем разложениям вида (1), (2) функции* $f(x)$, *а* c *и* C $(0 < c < C < \infty)$ - *абсолютные постоянные.*

Отметим, что первоначальное доказательство этой теоремы достаточно сложно. Заметим, что, опираясь на неё, Ч. Фефферман установил следующее равенство: $(\mathrm{ReH}_1)^* = \mathrm{BMO}$. Однако существует независимое доказательство равенства $(\mathrm{ReH}_1)^* = \mathrm{BMO}$ (см. [2], с. 241). Используя этот факт, нам удаётся не только упростить доказательство теоремы о представлении, но и наложить дополнительные ограничения на атомы. Основной результат данной статьи сформулирован в следующей теореме.

Теорема 1. *Пространство* ReH_1 *совпадает с множеством функций, допускающих представление*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \varphi_k(x)$$

с дополнительным условием на коэффициенты

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |c_k| < +\infty,$$

где $\varphi_k(x)$ - *специальные атомы.*

Естественно возникает вопрос: насколько можно сузить множество атомов, участвующих в представлении пространства ReH_1? Было бы желательно, чтобы атомы, участвующие в представлении, рождались сдвигами и сжатиями одной "материнской" функции, подобно всплескам. Однако, как показывает следующая теорема, это невозможно.

Теорема 2. *Пусть*

$$\lambda_k > \lambda_0 > 0, \quad x_k \in R, \quad k = 1,2,\ldots$$

некоторые числовые последовательности. Тогда для любой функции $\varphi \in \mathrm{ReH}_1$ *существует* $f \in \mathrm{ReH}_1$, *которую невозможно представить в виде ряда*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \cdot \lambda_k \varphi(\lambda_k(x - x_k)),$$

где коэффициенты абсолютно сходятся, т. е.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |c_k| < +\infty.$$

Ереванский государственный университет

Литература

1. *Fefferman Ch.* - Bull. Amer. Math. Soc. 1971. V.77. P 104-112.
2. *Garnett J.* Bounded Analytic Functions. Academic Press. 1981.

Արմեն Ա. Վաղարշակյան

Re H_1 տարածության ֆունկցիաների ներկայացման մասին

Հոդվածում քննարկվում է Re H_1 տարածության տարրերը բացարձակ զուգամետ գործակիցներ ունեցող ֆունկցիոնալ շարքերով ներկայացնելու հարցը: Օգտագործելով այն փաստը, որ Re H_1-ի համալուծ տարածությունը BMO-ն է, ուժեղացվում է Չ. Ֆեֆֆերմանի թեորեմը, և ցույց է տրվում, որ ներկայացմանը մասնակցող ֆունկցիաները չեն կարող ծնվել որևէ ֆունկցիայի տեղաշարժերից և սեղմումներից:

Armen A. Vagharshakyan

On Representation of Functions from the Space Re H_1

In the article it is considered the question of representation of elements from the space Re H_1 by functional series with absolutely convergent coefficients. Using the fact that the space BMO is conjugate to Re H_1, Ch. Fefferman's theorem is strengthened, and it is shown that the functions which participate in the representation can't be generated by shifts and dilations of any function.