

УДК 517.53

А. М. Джрбашян

О функциях  $\omega$ -ограниченного вида в полуплоскости

(Представлено академиком В.С. Закарян 30/IX 2004)

**Введение.** Общеизвестно, что в задачах, относящихся к классам функций, регулярных в полуплоскости конечной комплексной плоскости, естественны ограничения на рост функций, инвариантные относительно параллельного сдвига, а также аппарат преобразований Фурье - Лапласа. Такие ограничения на рост рассматривают конечные граничные точки равносильно, а  $\infty$  - иначе. С другой стороны, в работе [1] показано, что инвариантное относительно сдвига условие естественно дополнять локальным условием в окрестности  $\infty$ . Именно таким образом введены исследуемые в данной статье классы регулярных в полуплоскости функций.

В статье даны представления общей теории функций  $\omega$ -ограниченного вида в верхней полуплоскости. Получены канонические представления некоторых банаховых пространств  $A_{\omega, \gamma}^p$  голоморфных функций. При  $p = 2$  (т.е. в гильбертовом случае) установлены: теорема об ортогональной проекции из  $L_{\omega}^2$  в  $A_{\omega}^2$ , теорема типа Пэли - Винера и теорема о естественной изометрии  $A_{\omega}^2$  с пространством Харди  $H^2$ , являющейся интегральным оператором вместе со своим обратным. Затем даны канонические представления  $\delta$ -субгармонических классов типа Неванлинны - Джрбашяна. Рассматриваемые функции могут иметь любой рост вблизи конечных точек вещественной оси.

**1. Пространства  $A_{\omega, \gamma}^p$ .** Определим  $A_{\omega, \gamma}^p$  ( $0 < p < +\infty$ ,  $-\infty < \gamma \leq 2$ ) как множество тех функций  $f(z)$  голоморфных в верхней полуплоскости  $G^+ = \{z : \text{Im } z > 0\}$ , которые при достаточно малых  $p > 0$  удовлетворяют неванлинновскому условию

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_{\beta}^{\pi-\beta} \log^+ |f(\text{Re } i\vartheta)| \left( \frac{\sin \frac{\pi(\vartheta - \beta)}{\pi - 2\beta}}{\pi - 2\beta} \right)^{1-\pi/\kappa} d\vartheta = 0, \quad (1.1)$$

где  $\beta = \arcsin[(p)/R] = [(\pi)/2] - \kappa$  и, одновременно,

$$\|f\|_{p, \omega, \gamma}^p \equiv \iint_{G^+} |f(z)|^p \frac{d\mu_{\omega}(z)}{(1 + |z|)^{\gamma}} < +\infty, \quad (1.2)$$

где  $d\mu_{\omega}(x + iy) = dx d\omega(2y)$  и  $\omega(t) \in \Omega_{\alpha}$  ( $\alpha \geq -1$ ), т.е.  $\omega(t)$  в  $[0, +\infty)$  таково, что

(i)  $\omega(t) \nearrow$  (не убывает) в  $(0, +\infty)$ ,  $\omega(0) = \omega(+0)$  и существует последовательность  $\delta_k \downarrow 0$  такая, что  $\omega(\delta_k) \downarrow$  (строго убывает),

(ii)  $\omega(t) \asymp t^{1+\alpha}$  при  $\Delta_0 \leq t < +\infty$  ( $\Delta_0 \geq 0$ )

( $f(t) \asymp g(t)$  означает, что  $m_1 f(t) \leq g(t) \leq m_2 f(t)$  при некоторых постоянных  $m_{1,2} > 0$ ). Определим

лебегово пространство  $L^p_{\omega, \gamma}$  одним лишь условием (1.2) и отметим, что при  $\omega(t) \in \Omega_\alpha$  ( $\alpha \geq -1$ ) ограничение (ii) имеет место при любом  $\Delta \in (0, \Delta_0]$ .

**Замечание 1.1.** Очевидно  $A^p_{\omega, \gamma} = (i + z)^{\gamma/p} A^p_{\omega, 0}$ . Далее, при  $\omega(t) = t^{1+\alpha}$  ( $\alpha > -1$ ),  $\gamma = 0$  и  $p \geq 1$  пространство  $A^p_{\omega, \gamma}$  совпадает с хорошо известным  $A^p_\alpha$  в полуплоскости (см. [2], [3], [4], а также [5]). В этом случае из (1.2) следует (1.1), и эта импликация верна в более общем случае - когда  $\omega(t)$  непрерывно дифференцируемо в  $(0, +\infty)$  и таково, что  $\omega'(t) \geq Mt^\alpha$  ( $\alpha > -1$ ) для почти всех  $t > 0$  и некоторой постоянной  $M > 0$ .

**Замечание 1.2.** В общем случае (1.2) не обеспечивает выполнение условия (1.1). К необходимости наложения условия (1.2) мы вернемся в конце раздела 3.

Напомним некоторые свойства [1] голоморфных пространств Харди

$$H^p_\gamma \equiv H^p \left\{ \frac{dx}{(1+|x|)^\gamma} \right\} = (z+i)^{\gamma/p} H^p_0 \quad (1.3)$$

( $0 < p < +\infty$ ,  $-\infty < \gamma \leq 2$ ), где  $H^p_0 \equiv H^p$  пространство Харди, введенное в верхней полуплоскости  $G^+ = \{z : \text{Im } z > 0\}$  ограничением

$$\sup_{y>0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p dx < +\infty. \quad (1.4)$$

$H^p_\gamma$  совпадает со множеством тех функций  $f(z)$ , голоморфных в  $G^+$ , для которых  $|f(z)|^p$  имеет гармоническую мажоранту в  $G^+$  (т.е.  $f(z)$  лежит в конформном образе пространства Харди  $H^p$  из  $|z| < 1$ ) и  $f(x) \in L^p([dx/((1+|x|)^\gamma)]) \equiv L^p_\gamma$  на вещественной оси.  $H^p_\gamma$  ( $1 \leq p < +\infty$ ,  $-\infty < \gamma \leq 2$ ) является Банаховым пространством с нормой  $\|f(z)\|_{H^p_\gamma} = \|f(x)\|_{L^p_\gamma}$ . При этом  $H^p_2$  совпадает с конформным образом  $H^p$  из  $|z| < 1$ , а при  $\gamma = 0$  - с  $H^p_0$ , определяемым условием (1.4). Кроме того, из результатов [1] следует, что  $H^p_\gamma$  ( $0 < p < +\infty$ ,  $-\infty < \gamma \leq 2$ ) совпадает со множеством тех голоморфных в  $G^+$  функций, которые удовлетворяют (1.1) при любом  $\rho > 0$  и таковы, что

$$\liminf_{y \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p \frac{dx}{(1+|x|)^\gamma} < +\infty. \quad (1.5)$$

В [1] ясно, что полуплоскость  $G^+_\rho = \{z : \text{Im } z > \rho\}$  может быть исчерпана круговыми сегментами, а следовательно при (1.2) условие (1.1) эквивалентно тому, что

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_{\beta}^{\pi-\beta} |f(\operatorname{Re}^{i\vartheta})|^p \left( \sin \frac{\pi(\vartheta - \beta)}{\pi - 2\beta} \right)^{1-\pi/\kappa} d\vartheta < +\infty \quad (1.1')$$

при любом  $\rho > 0$ , а также каждому из следующих двух условий:

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_0^{\pi} \log |f(\operatorname{Re}^{i\vartheta} + i\rho)| \sin \vartheta d\vartheta = 0, \quad \liminf_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_0^{\pi} |f(\operatorname{Re}^{i\vartheta} + i\rho)|^p \sin \vartheta d\vartheta < +\infty.$$

Кроме того, если  $f(z) \in H_Y^p(-\infty < \gamma \leq 2, 0 < p < +\infty)$ , то при любом  $0 < M < +\infty$

$$\sup_{0 < y < M} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x + iy)|^p \frac{dx}{(1 + |x|)^\gamma} < +\infty. \quad (1.6)$$

Проверяя выполнение (1.6), легко показать, что при любом  $p > 1$

$$H_Y^p \subset H_Y^1 \quad \text{при} \quad \begin{cases} 1 - \frac{1-\gamma}{p} < \gamma' < 1, & \text{если } \gamma < 1, \\ 1 + \frac{\gamma-1}{p} < \gamma' \leq 2, & \text{если } 1 \leq \gamma \leq 2. \end{cases} \quad (1.7)$$

Отметим, что если  $f(z) \in A_{\omega, \gamma}^p (p > 0, \omega \in \Omega_\alpha, \alpha \geq -1, -\infty < \gamma < 1)$ , то  $f(z + i\rho)$  принадлежит  $H_Y^p$  при любом  $\rho > 0$ . Кроме того, верно следующее

**Предложение 1.1.** При любых  $p > 0$  и  $\gamma \in (-\infty, 2]$  сумма  $\cup_{\omega \in \Omega_\alpha} A_{\omega, \gamma}^p$  совпадает со множеством

всех функций, принадлежащих  $H_Y^p$  в любой полуплоскости  $G_p^+ (\rho > 0)$ .  $A_{\omega, \gamma}^p (1 \leq p < +\infty, -\infty < \gamma < 1, \omega \in \Omega_\alpha, \alpha \geq -1)$  является банаховым пространством с нормой (1.2).

**2. Представление по полосе.** Полагая, что  $\omega(t) \in \Omega_\alpha (\alpha \geq -1)$ , будем пользоваться следующим континуальным аналогом ядра типа Коши М.М.Джрбашяна:

$$C_\omega(z) = \int_0^{+\infty} e^{itz} \frac{dt}{I_\omega(t)}, \quad I_\omega(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} d\omega(x). \quad (2.1)$$

Функция  $C_\omega(z)$  голоморфна в  $G^+$ , поскольку условия (i), (ii) обеспечивают равномерную сходимость интеграла (2.1) внутри  $G^+$ . Отметим, что ядро (2.1) впервые было использовано А.О.Карапетяном [6], где оно было построено в многомерном случае трубчатых областей (см. также [7-9]). В случае простой шкалы  $\omega(t) = t^{1+\alpha}$  имеем  $I_\omega(t) = \Gamma(2 + \alpha)t^{-(1+\alpha)}$  и  $C_\omega(z) = (-iz)^{-$

$(2+\alpha) \quad (-2 < \alpha < +\infty).$

Для установления канонических представлений пространств  $A_{\omega, \gamma}^p$  найден новый подход к применению преобразований Фурье - Лапласа, отличающийся от известного подхода [10]. Существенны также включения (1.7) и следующее утверждение о представимости интегралом

Коши в  $H_{\gamma}^p$ : если  $f(z) \in H_{\gamma}^p (p \geq 1, \gamma < 1)$ , то

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-z} dt \quad \text{и} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-\bar{z}} dt = 0 \quad z \in G^+.$$

**Теорема 2.1.** Пусть  $f(z) \in A_{\omega, \gamma}^p(G^+)$  при некоторых  $1 \leq p < +\infty$ ,  $-\infty < \gamma < 1$  и  $\omega(x)$  удовлетворяющем (i) и таком, что  $\omega(t) = \omega(\Delta) < +\infty$  ( $\Delta < t < +\infty$ ) при некотором  $\Delta > 0$ . Тогда

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{G^+} f(w) C_{\omega}(z - \bar{w}) d\mu_{\omega}(w), \quad z \in G^+, \quad (2.2)$$

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \iint_{G^+} \{\operatorname{Re} f(w)\} C_{\omega}(z - \bar{w}) d\mu_{\omega}(w), \quad z \in G^+, \quad (2.3)$$

где оба интеграла абсолютно и равномерно сходятся внутри  $G^+$ .

**3. Представления по всей полуплоскости.** Устремление  $\Delta \rightarrow +\infty$  в (2.2) и (2.3), приводящее к цели, основано на следующей лемме.

**Лемма 3.1.** Пусть  $\omega(x) \in \Omega_{\alpha}$  при некотором  $\alpha \geq -1$ . Тогда для любого не целочисленного значения  $\beta \in ([\alpha] - 1, \alpha)$  и любого  $\rho > 0$  существует положительная постоянная  $M \equiv M_{\rho, \beta}$  такая, что

$$|C_{\omega}(z)| \leq M|z|^{-(2+\beta)}, \quad z \in G_{\rho}^+.$$

**Теорема 3.1.** Пусть  $f(z) \in A_{\omega, \gamma}^p$  при некоторых  $1 \leq p < +\infty$  и  $-\infty < \gamma < 1 - (1 + \alpha)(p - 1)$ . Тогда опять же справедливы представления (2.2) и (2.2), где оба интеграла абсолютно и равномерно сходятся внутри  $G^+$ .

**Замечание 3.1.** В случае, когда  $1 \leq p \leq 2$  и мера  $d\omega$  абсолютно непрерывна, представление (2.2) было установлено в [6-9] для общих, весовых классов со смешанной нормой в радиальных трубчатых областях из  $C^n$ .

Справедливо следующее утверждение о проекции из  $L_{\omega, \gamma}^p$  в  $A_{\omega, \gamma}^p$ .

**Теорема 3.2.** Пусть  $f(z) \in L_{\omega, \gamma}^p (1 \leq p < +\infty, -\infty < \gamma < 1)$  и пусть  $\omega(x)$  таково, как в теоремах 2.1 или 3.1. Тогда интегралы в формулах (2.2) и (2.3) представляют голоморфные в  $G^+$  функции, для которых верно (1.1).

**Замечание 3.2.** Ввиду последней теоремы представления (2.2) и (2.3) могут быть использованы вместе с оценкой ядра [11] для установления теорем о проекции из  $L^p_{\omega, \gamma}$  в  $A^p_{\omega, \gamma}$  и описания сопряженного пространства  $A^p_{\omega, \gamma}$  - так, как это сделано в [12,13] - в круге.

#### 4. Ортогональная проекция и изометрия. Верна следующая

**Теорема 4.1.** *Оператор ортогональной проекции пространства  $L^2_{\omega, 0}$  на свое подпространство  $A^2_{\omega, 0}$  ( $\omega \in \Omega_\alpha$ ,  $\alpha \geq -1$ ,  $\omega(0) = 0$ ) записывается в виде*

$$P_\omega f(z) = \frac{1}{2\pi} \int \int_{G^+} f(w) C_\omega(z - \bar{w}) d\mu_\omega(w), \quad f \in L^2_{\omega, 0}.$$

Следующее утверждение является аналогом теоремы Пэли - Винера.

**Теорема 4.2.** *Пространство  $A^2_{\omega, 0}$  ( $\omega \in \Omega_\alpha$ ,  $\alpha \geq -1$ ,  $\omega(0) = 0$ ) совпадает со множеством всех функций, представимых в виде*

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{itz} \frac{\Phi(t)}{\sqrt{I_\omega(t)}} dt, \quad z \in G^+, \quad \Phi(t) \in L^2(0, +\infty). \quad (4.1)$$

*Если такое представление верно, то  $\|f\|_{A^2_{\omega, 0}} = \|\Phi\|_{L^2(0, +\infty)}$  и*

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{I_\omega(t)}} \int_0^{+\infty} e^{-tv} \widehat{f}_v(t) d\omega(2v), \quad (4.2)$$

$$\text{где} \quad \widehat{f}_v(t) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R e^{-itu} f(u + iv) du.$$

**Замечание 4.1.** В частном случае абсолютно непрерывной меры  $d\omega$  теорема 4.2 следует из более общих утверждений [6], [14] в весовых пространствах со смешанной нормой в трубчатых областях из  $C^n$ .

**Замечание 4.2.** В дополнение к теореме 4.2 верно следующее утверждение: пусть  $S_1$  - множество тех  $\omega(x)$ , которые непрерывны и при некотором  $\Delta \in (0, +\infty)$  строго возрастают в  $[0, \Delta]$ ,  $\omega(0) = 0$  и  $\omega(x) = \omega(\Delta)$  при  $x > \Delta$ . Далее, пусть  $S_2$  - (более широкое) множество тех  $\omega(x)$ ,  $\omega(0) = 0$ ,

которые принадлежат  $\Omega_\alpha$  при каком-либо  $\alpha \geq -1$ . Тогда  $\bigcup_{\omega \in S_1} A^2_{\omega, 0} = \bigcup_{\omega \in S_2} A^2_{\omega, 0}$ , и обе эти суммы совпадают со множеством всех функций вида

$$f(z) = \int_0^{+\infty} e^{itz} \Psi(t) dt, \quad z \in G^+, \quad \text{где} \quad e^{-\varepsilon t} \Psi(t) \in L^2(0, +\infty) \quad \text{при любом} \quad \varepsilon > 0.$$

Следующая теорема в частности дает больше информации о функции  $\Phi$ , участвующей в представлении (4.1). Предварительно введем в рассмотрение оператор

$$L_\omega f(z) \equiv \int_0^{+\infty} f(z + i\sigma) d\omega(\sigma)$$

и отметим, что: если  $\omega(x) \in \Omega_\alpha$  ( $-1 \leq \alpha < +\infty$ ) и  $\omega(0) = 0$ , то квадрат Вольтерра функции  $\omega(x)$ , т.е. функция

$$\tilde{\omega}(x) = \int_0^x \omega(x-t) d\omega(t), \quad 0 < x < +\infty, \quad \tilde{\omega}(0) = 0, \quad (4.3)$$

принадлежит  $\Omega_{1+2\alpha}$ . Кроме того,  $I_\omega^2(x) = I_{\tilde{\omega}}(x)$  ( $0 < x < +\infty$ ).

**Теорема 4.3.** Пусть функция  $\omega(t)$  ( $\omega(0) = 0$ ) принадлежит  $\Omega_\alpha$  ( $-1 \leq \alpha < +\infty$ ) и пусть  $\tilde{\omega}$  - ее квадрат Вольтерра (4.3). Тогда  $A_{\tilde{\omega},0}^2$  совпадает со множеством функций, представимых в виде

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) C_\omega(z-t) dt, \quad z \in G^+, \quad \varphi \in L^2(-\infty, +\infty). \quad (4.4)$$

Если  $f \in A_{\tilde{\omega},0}^2$ , то единственной функцией из пространства Харди  $H^2 \equiv H_0^2$ , которой можно

заменить  $\varphi(t)$  в (4.4), является  $L_\omega f$ . Кроме того,  $\|L_\omega f\|_{H^2} = \|f\|_{A_{\tilde{\omega},0}^2}$  и  $\varphi - L_\omega f \perp H^2$  для любой

функции  $\varphi \in L^2(-\infty, +\infty)$ , с которой верно (4.4). Оператор  $L_\omega$  является изометрией  $A_{\tilde{\omega},0}^2 \rightarrow H^2$ , а интеграл (4.4) определяет  $(L_\omega)^{-1}$  в  $H^2$ .

**Замечание 4.3.** При условиях теоремы 4.3 в представлении (4.1) пространства  $A_{\tilde{\omega},0}^2$  функция  $\Phi$  является преобразованием Фурье функции  $L_\omega f$  по вещественной оси.

## 5. Весовые классы гармонических функций. Справедлива следующая

**Теорема 5.1.** Пусть функция  $U(z)$  гармонична в полуплоскости  $G^+$  и такова, что для достаточно малых  $\rho > 0$  и некотором  $\gamma \in (-\infty, 2]$

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_\beta^{\pi-\beta} |U(Re^{i\vartheta})| \left( \sin \frac{\pi(\vartheta - \beta)}{\pi - 2\beta} \right)^{1-\pi/\kappa} d\vartheta = 0, \quad (5.1)$$

$$\int \int_{G^+} |U(z)| \frac{d\mu_\omega(z)}{(1 + |z|)^\gamma} < +\infty, \quad (5.2)$$

где  $\beta = \arcsin[(\rho)/R] = [(\pi)/2] - \kappa$  и  $d\mu_\omega(x + iy) = dx d\omega(2y)$ . Далее, пусть выполнено одно из следующих условий:

1°.  $\omega(t)$  удовлетворяет условию (i) (см. раздел 1) и  $\omega(t) = \omega(\Delta)$  ( $\Delta < t < +\infty$ ) при некотором  $\Delta > 0$ , или же

2°.  $\omega(t) \in \Omega_\alpha$  при некоторых  $\alpha \geq -1$  и  $\gamma < 1$ .

Тогда

$$U(z) = \frac{1}{\pi} \int \int_{G^+} U(w) \operatorname{Re} \{C_\omega(z - \bar{w})\} d\mu_\omega(w), \quad z \in G^+, \quad (5.3)$$

где интеграл абсолютно и равномерно сходится внутри  $G^+$ .

**Замечание 5.1.** Для классов гармонических в  $G^+$  функций, определенных условиями (5.1) и (5.2) с заменой  $|U|$  на  $|U|^p$  ( $1 \leq p < +\infty$ ), представление (5.3) доказано также в случае, когда интеграл берется по полосе (т.е.  $\omega(t) = \omega(\Delta)$ ,  $\Delta < t < +\infty$ )

**6. Классы типа Неванлинны - Джрбашяна в полуплоскости.** Всюду ниже будем полагать, что  $U(z)$  является  $\delta$ -субгармонической в  $G^+$  функцией и  $\nu$  - ее ассоциированная мера, т.е.  $U(z) = U_1(z) - U_2(z)$ , где  $U_{1,2}(z)$  субгармонические в  $G^+$  функции с риссовскими ассоциированными мерами  $\nu_{1,2}$ , и  $\nu = \nu_1 + \nu_2$ . Кроме того, будем полагать, что мера  $\nu$  минимально разложена в Жордановом смысле, т.е.  $\nu = \nu_+ - \nu_-$ , где  $(\operatorname{supp} \nu_+) \cap (\operatorname{supp} \nu_-) = \emptyset$  и  $\nu_\pm$  - положительная и отрицательная вариации меры  $\nu$ . Будем говорить, что две  $\delta$ -субгармонические в какой-либо области  $G$  функции равны, т.е.  $U(z) = V(z)$ , где  $V(z) = V_1(z) - V_2(z)$  (и  $V_{1,2}(z)$  субгармоничны в  $G$ ), если  $U_1(z) + V_2(z) = U_2(z) + V_1(z)$  всюду в  $G$ . Для  $\delta$ -субгармонической в  $G^+$  функции  $U(z)$  будем рассматривать характеристику Цудзи следующего вида:

$$L(y, U) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U^+(x + iy) dx + \int_y^{+\infty} n_+(t) dt, \quad 0 < y < +\infty,$$

где  $n_+(t) = \iint_{G_t^+} dv_+(\zeta)$ ,  $G_t^+ = \{\zeta : \operatorname{Im} \zeta > t\}$ . Полагая характеристику  $L(y, -U)$  определенной аналогично - посредством  $U^-$  и  $\nu_-$ , отметим, что в общем случае  $L(y, U)$  либо  $L(y, -U)$ , либо же

обе эти величины могут быть бесконечны. Тем не менее, существуют некоторые условия (см. [15], гл. 5), при которых величины  $L(y, \pm U)$  ( $0 < y < +\infty$ ) конечны и связаны особой формой формулы Б.Я. Левина:

$$L(y, U) = L(y, -U), \quad 0 < y < +\infty, \quad (6.1)$$

что является естественным аналогом хорошо известного соотношения равновесия для характеристик Неванлинны по концентрическим кругам.

**Определение 6.1.**  $\tilde{\Omega}_\alpha$  ( $\alpha > -1$ ) - множество функций  $\omega(x)$ ,  $\omega(0) = 0$ , которые непрерывны и строго возрастают в  $[0, +\infty)$ , непрерывно дифференцируемы в  $(0, +\infty)$  и таковы, что  $\omega'(x) \asymp x^\alpha$  ( $\Delta < x < +\infty$ ) при любом  $\Delta > 0$ .

Легко видеть, что если  $\omega(x) \in \tilde{\Omega}_\alpha$ , то при любом  $\rho \geq 0$  функция  $\omega(x + \rho)$  принадлежит классу  $\Omega_\alpha$ , использованному ранее.

Нижеследующее определение аналога неванлинновского весового класса в полуплоскости (см. п. 216 в [16], а также [15]) естественно ввиду того, что в общем случае формула (6.1) не верна.

**Определение 6.2.**  $N_\omega$  ( $\omega(x) \in \tilde{\Omega}_\alpha$ ,  $\alpha > -1$ ) - множество  $\delta$ -субгармонических в  $G^+$  функций, для которых

$$\int_0^{+\infty} [L(y, U) + L(y, -U)] d\omega(2y) < +\infty. \quad (6.2)$$

Формулировку теоремы о каноническом представлении  $\delta$ -субгармонических функций из классов  $\mathcal{N}_\omega$  предварим следующим утверждением.

**Теорема 6.1.** Пусть  $\omega(x) \in \tilde{\Omega}_\alpha$  ( $-1 \leq \alpha < +\infty$ ). Тогда функция

$$b_\omega(z, \zeta) = \exp \left\{ - \int_0^{2\operatorname{Im} \zeta} C_\omega(z - \zeta + it) \omega(t) dt \right\}, \quad \operatorname{Im} z > \operatorname{Im} \zeta,$$

голоморфно продолжается на все  $G^+$ , где имеет единственный, простой нуль в точке  $z = \zeta$ . Если последовательность  $\{z_k\} \subset G^+$  удовлетворяет условию

$$\sum_k \int_0^{2\operatorname{Im} z_k} \omega(t) dt < +\infty,$$

то внутри  $G^+$  сходится произведение типа Бляшке  $B_\omega(z, \{z_k\}) \equiv \prod_k b_\omega(z, z_k)$ .

**Теорема 6.2.** Пусть  $U(z) \in \mathfrak{K}_\omega$  при некотором  $\omega(x) \in \tilde{\Omega}_\alpha$  ( $\alpha > -1$ ). Тогда

$$\iint_{G^+} |U(z)| d\mu_\omega(z) < +\infty, \quad \iint_{G^+} \left( \int_0^{2\operatorname{Im} \zeta} \omega(t) dt \right) dv_\pm(\zeta) < +\infty, \quad (6.3)$$

и при любом  $\rho > 0$

$$\iint_{G_\rho^+} (1 + \operatorname{Im} \zeta) dv_\pm(\zeta) < +\infty.$$

Кроме того, потенциалы типа Грина  $P_\omega^{(\pm)}(z) \equiv \iint_{G^+} \log |b_\omega(z, \zeta)| dv_\pm(\zeta)$  по положительной и отрицательной вариациям ассоциированной меры функции  $U(z)$  сходятся, и в  $G^+$  имеет место представление

$$U(z) = \iint_{G^+} \log |b_\omega(z, \zeta)| dv(\zeta) + \frac{1}{\pi} \iint_{G^+} U(w) \operatorname{Re} \left\{ C_\omega(z - \bar{w}) \right\} d\mu_\omega(w). \quad (6.4)$$

В заключение приведем еще одну теорему, которая несколько отличается от теоремы 6.1, а также некоторые замечания. Аналогично разделу 2, можно рассматривать весовые классы  $\delta$ -субгармонических функций с гармоническими составляющими, записываемыми в виде интегралов по полосе. А именно, верна следующая

**Теорема 6.3.** Пусть  $U(z) \in \mathfrak{K}_\omega^\Delta$ , где  $\Delta > 0$  - какое-либо фиксированное число и  $\omega(x)$ ,  $\omega(+0) = 0$  - строго возрастающая на  $(0, \Delta)$  функция, такая что  $\omega(x) = \omega(x + \Delta)$  ( $0 < x < +\infty$ ). Тогда все утверждения теоремы 6.2 остаются в силе.

**Замечание 6.1.** Пусть субгармоническая в  $G^+$  функция  $U(z)$  такова, что

$$\iint_{G^+} |U(z)| d\mu_\omega(z) < +\infty, \quad \text{где}$$

1°.  $\omega(x)$  принадлежит  $\tilde{\Omega}_\alpha$  ( $-1 < \alpha < +\infty$ ), или

2°.  $\omega(x)$  строго возрастающая в  $(0, \Delta)$  ( $\Delta > 0$ ) функция такая, что  $\omega(+0) = 0$  и  $\omega(x) = \omega(x + \Delta)$  ( $0 < x < +\infty$ ) и, в добавок,  $U(z)$  удовлетворяет (5.1).

Тогда  $U(z)$  принадлежит классу  $N_\omega$  (при выполнении 1°), или же  $\mathfrak{K}_\omega^\Delta$  (при выполнении 2°). Тем

самым, функция  $U(z)$  представима в виде (6.4).

**Замечание 6.2.** В частном случае, когда  $U(z)$  принадлежит  $\mathcal{H}_\omega$  или же  $\mathcal{H}_\omega^\Delta(\omega(x))$  таково, как в теоремах 6.2 или 6.3) и  $U(z) = \log|f(z)|$  и  $f(z)$  мероморфная в  $G^+$  функция, представление (6.4) переходит в факторизацию вида

$$f(z) = \frac{B_\omega(z, \{a_n\})}{B_\omega(z, \{b_m\})} \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int \int_{G^+} \log|f(w)| C_\omega(z - \bar{w}) d\mu_\omega(w) + iC \right\}, \quad z \in G^+,$$

где  $C$  - вещественное число, а  $\{a_n\}, \{b_m\} \subset G^+$  - нули и полюсы  $f(z)$ , которые удовлетворяют (6.3).

В заключение отметим, что данная статья дополняет результаты недавно вышедшей работы [17].

Институт математики НАН РА

### Литература

1. *Jerbashian A. M.* - J. of Contemp. Math. Analysis. 1993. V. 28. N4. P. 42-61.
2. *Coifman R. R., Rochberg R.* - Astérisque. 1980. V. 77. P. 12-67.
3. *Ricci F., Taibleson M.* - Annali Scuola Normale Superiore - Pisa. Classe di Scienze. Ser. IV. 1983. V. X. N1. P. 1-54.
4. *Djrbashian M. M., Djrbashian A. E.* - Dokl. Akad. Nauk USSR. 1985. V. 285. N3. P. 547-550.
5. *Djrbashian M. M., Karapetyan A. H.* - Ann. Pol. Math. 1991. V. 55. P. 87-94.
6. *Карапетян А. О.* Авторефер. канд. дис. Ереван. 1988.
7. *Карапетян А. О.* - Изв. АН АрмССР. Математика. 1990. Т. 25. N4. С. 315-332.
8. *Карапетян А. О.* - Изв. АН АрмССР. Математика. 1991. Т. 26. N1.
9. *Карапетян А. О.* - Изв. АН АрмССР. Математика. 1992. Т. 27. N1.
10. *Гиндикин С. М.* - Успехи мат. наук. 1964. Т. 19. N4. С. 3-92.
11. *Jerbashian A. M.* - Archives of Inequalities and Applications. 2003. V. 1. P. 399-412.
12. *Jerbashian A. M.* - Preprint 2002-01. Institute of Mathematics. National Ac. of Sci. of Armenia. Yerevan. 2002.
13. *Jerbashian A. M.* - Complex Variables. 2005. V. 50. N3. P. 155-183.
14. *Карапетян А. О.* - Изв. АН АрмССР. Математика. 1988. Т. 23. N1. С. 91-96.
15. *Jerbashian A. M.* - Springer Verlag. USA. 2005. 196 p.
16. *Nevanlinna R.* - Springer. Berlin. 1937.
17. *Jerbashian A. M.* In: Operator Theory: Advances and applications. Birkhauser Verlag. Basel. 2005. V. 158. P. 141-158.

## Ա.Մ. Ջրբաշյան

### Կիսահարթության մեջ $\omega$ -սահմանափակ տեսքի ֆունկցիաների մասին

Հոդվածում տրված են կիսահարթության մեջ  $\omega$ -սահմանափակ տեսքի ֆունկցիաների տեսության ներկայացման հիմնական բանաձևերը: Ստացված են հոլոմորֆ ֆունկցիաների որոշ  $A_{\omega, \gamma}^p$  բանախյան տարածությունների կանոնական ներկայացումները: Երբ  $p = 2$  այսինքն՝ հիլբերտյան դեպքում) ստացված են. թեորեմ  $L_\omega^2$ -ից  $A_\omega^2$  օրթոգոնալ արտապատկերման մասին, Պելի - Վիների տիպի թեորեմ, ինչպես նաև թեորեմ՝  $A_\omega^2$  տարածության բնական իզոմետրիայի մասին Հարդիի  $H^2$ -ի հետ, որն ինտեգրալ օպերատոր է իր հակադարձի հետ: Այնուհետև բերված են կիսահարթությունում  $\delta$ -սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների Նևանլինա - Ջրբաշյանի տիպի դասերի կանոնական ներկայացումները: Դիտարկված դասերի ու տարածությունների ֆունկցիաները իրական առանցքի վերջավոր կետերի մոտ կարող են կամայական աճ ունենալ:

**A.M. Jerbashian**

### **On Functions of $\omega$ -bounded Type in the Half-plane**

This paper gives the basic representations of the general theory of functions of  $\omega$ -bounded type in the upper half-plane. The starting point are the canonical representations of some Banach spaces  $A_{\omega, \gamma}^p$  of holomorphic functions. For  $p = 2$  (i.e. in the case of Hilbert spaces) there is a theorem on the orthogonal projection from the corresponding  $L_\omega^2$  to  $A_\omega^2$ , a Paley - Wiener type theorem and a theorem on a natural isometry between  $A_\omega^2$  and the Hardy space  $H^2$ , which is an integral operator along with its inversion. Then the canonical representations of Nevanlinna - Djrbashian type classes of  $\delta$  - subharmonic functions are given. The functions from the considered spaces and classes can have arbitrary growth near the finite points of the real axis.