

УДК 539.3

Академик С. А. Амбарцумян, В. Ц. Гнуни

Об изгибе нелинейно-упругой балки с учетом разнсопротивляемости и разнпрочности материала к растяжению и сжатию

(Представлено 6/X 2004)

В работе на примере задачи чистого изгиба балки из нелинейно-упругого материала делается попытка оценить влияние разнсопротивляемости и разнпрочности материала на несущую способность.

1. В случае изгиба балки, на основе гипотезы плоских сечений, зависимость продольного нормального напряжения σ от продольной деформации растяжения (сжатия) в общем представляется зависимостью

$$\sigma = f(\varepsilon), \quad (1.1)$$

где относительно функции $f(\varepsilon)$ принимается, что $f(0) = 0$, $f(\varepsilon)$ имеет два экстремума - максимум при $\varepsilon_{B+} > 0$ и минимум при $\varepsilon_{B-} < 0$, после которых сопротивляемость материала резко падает. В области $\varepsilon \in [\varepsilon_{n-}; \varepsilon_{n+}]$ связь между σ и ε практически линейная:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (1.2)$$

где E - модуль Юнга, $\varepsilon_{n+} = -\varepsilon_{n-}$ пределы пропорциональности при растяжении и сжатии. Для тел из хрупких материалов или материалов с небольшой площадкой пластичности при непрерывном нагружении можно предполагать, что функция $f(\varepsilon)$ обеспечивает взаимно-однозначную связь между напряжениями и деформациями на отрезке $[\varepsilon_{B-}; \varepsilon_{B+}]$.

Приближенным представлением

$$\sigma = E\varepsilon - B\varepsilon^2 - C\varepsilon^3 \quad (1.3)$$

и из условий

$$\max \sigma = \sigma_{B+} = E\varepsilon_{B+} - B\varepsilon_{B+}^2 - C\varepsilon_{B+}^3,$$

$$\min \sigma = \sigma_{B-} = E\varepsilon_{B-} - B\varepsilon_{B-}^2 - C\varepsilon_{B-}^3$$

получается

$$\varepsilon_{B+} = \frac{B}{3C} \left(\sqrt{1+\delta} - 1 \right), \quad \varepsilon_{B-} = -\frac{B}{3C} \left(\sqrt{1+\delta} + 1 \right), \quad \delta = \frac{3CE}{B^2}, \quad (1.4)$$

$$\sigma_{B+} = \frac{EB}{9C} \left[2 \sqrt{1+\delta} \left(\frac{1}{1+\frac{\delta}{\delta}} \right) - \frac{2}{\delta} - 3 \right], \quad (1.5)$$

$$\sigma_{B-} = -\frac{EB}{9C} \left[2 \sqrt{1+\delta} \left(\frac{1}{1+\frac{\delta}{\delta}} \right) + \frac{2}{\delta} + 3 \right].$$

Если для материала заданы E , σ_{B+} , σ_{B-} , то из (1.5) можно определить коэффициенты B и C

$$B = \frac{4E^2}{3(\sigma_{B-} + \sigma_{B+})} \frac{\gamma^3}{(\gamma^2 - 1)^2}, \quad C = \frac{16E^3}{27(\sigma_{B-} + \sigma_{B+})^2} \frac{\gamma^6}{(\gamma^2 - 1)^3}, \quad (1.6)$$

где $\gamma = \sqrt{1+\delta} > 1$ корень кубического уравнения

$$\gamma^3 - 1,5a\gamma^2 + 0,5a = 0 \quad \left(a = \frac{\sigma_{B-} + \sigma_{B+}}{\sigma_{B-} - \sigma_{B+}} \right).$$

Отметим, что в разложении функции $f(\varepsilon)$ в степенной ряд четные члены разложения обеспечивают разносопротивляемость материала к растяжению и сжатию ($B \neq 0$ в (1.3)) и достижение максимума и минимума в различных $(\varepsilon_{B+}, \sigma_{B+})$ и $(\varepsilon_{B-}, \sigma_{B-})$ точках.

Ниже на простейшем примере чистого изгиба балки рассматриваются различные случаи закона упругости (1.3). В случае чистого изгиба балки на основе гипотезы плоских сечений

$$\varepsilon = u' - zw''. \quad (1.7)$$

Здесь $u(x)$, $w(x)$ - продольное и нормальное перемещения точек оси балки для напряжения σ согласно (1.3)-(1.7) получается

$$\sigma = Eu' - B(u')^2 - C(u')^3 - z[E - 2Bu' - 3C(u')^2]w'' - z^2(B + 3Cu')(w'')^2 + z^3(w'')^3, \quad (1.8)$$

откуда для продольного усилия T и изгибающего момента M получаются формулы

$$T = Esu' - Bs(u')^2 - Cs(u')^3 - BI(w'')^2 - 3CIu'(w'')^2, \quad (1.9)$$

$$M = -EIw'' + (2B + 3Cu')Iu'w'' + CJ(w'')^3,$$

где штрихом обозначено производное по x , s - площадь, $I = bh^3/12$ - момент инерции поперечного сечения ($b \times h$) балки, $J = bh^5/80$.

Уравнения равновесия и граничные условия при чистом изгибе балки суть

$$T' = 0, \quad M = M_0. \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} u = 0, \quad w = 0, \quad M = M_0 \quad \text{при} \quad x = 0, \\ T = 0, \quad w = 0, \quad M = M_0 \quad \text{при} \quad x = l. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Из (1.9)-(1.11) для определения перемещений u, w получается система уравнений

$$\begin{aligned} Cf_1^3 - \frac{20}{3}(E - 2Bf_2 - 3Cf_2^2)f_1 &= \frac{80M_0}{bh^2}, \\ Cf_2^3 + Bf_2^2 - Ef_2 + \frac{C}{4}f_1^2f_2 + \frac{B}{12}f_1^2 &= 0, \end{aligned} \quad (1.12)$$

где введены обозначения

$$f_1 = hw'', \quad f_2 = u', \quad (1.13)$$

откуда в силу (1.11)

$$w = \frac{x(x-l)}{2h} f_1, \quad u = xf_2. \quad (1.14)$$

Ниже рассматриваются некоторые частные случаи закона упругости (1.3).

2. Пусть $B = C = 0$ (линейная задача). В этом случае $\sigma = E\varepsilon$ из системы (1.12) получается

$$f_1 = hw'' = -\frac{M_0 h}{EI}, \quad f_2 = 0, \quad (2.1)$$

$$u = 0, \quad \varepsilon = -zw'', \quad \sigma = -zEw'', \quad (2.2)$$

откуда

$$\sigma = -z \frac{M_0}{I}, \quad \max_{(z)} \sigma = -\min_{(z)} \sigma = \frac{M_0 h}{2I} = \sigma_n, \quad M_{on} = \frac{2I\sigma_n}{h},$$

где σ_n - предел пропорциональности материала, причем $\sigma_{n+} = -\sigma_{n-} = \sigma_n$, M_{on} - допускаемое для линейной задачи значение изгибающего момента M_0 .

3. Пусть $B = 0$, $C \neq 0$, тогда

$$\sigma = E\varepsilon - C\varepsilon^3, \quad (3.1)$$

В этом случае материал одинаково сопротивляется растяжению и сжатию и функция (3.1) принимает экстремальные значения при

$$\varepsilon_B = \pm \sqrt{\frac{E}{3C}} \quad \text{и} \quad \max \sigma = -\min \sigma = \frac{2E}{3C} \sqrt{\frac{E}{3C}} = \sigma_B, \quad (3.2)$$

откуда

$$C = \frac{4}{27} \frac{E^3}{\sigma_B^2}. \quad (3.3)$$

Отметим, что формулы (3.2) получаются из (1.4), (1.5) при $B = 0$.

Система уравнений (1.12) представляется в виде

$$Cf_1^3 - \frac{20}{3} Ef_1 = \frac{80M_0}{bh^2}, \quad f_2 = 0,$$

или с учетом (1.13) и (3.3)

$$f_2 = u' = 0, \quad f_1^3 - 45 \frac{\sigma_B^2}{E^2} f_1 - 540 \frac{\sigma_B^2}{E^3 bh^2} M_0 = 0. \quad (3.4)$$

Здесь, согласно (2.3), принимая $M_0 = \alpha M_{on} = 2\alpha I \sigma_n / h$, уравнение для определения $f_1 = hw''$ представляется в виде

$$f_1^3 - 45 \frac{\sigma_B^2}{E^2} f_1 - 90\alpha \frac{\sigma_B^2 \sigma_n}{E^3} = 0, \quad (3.5)$$

где коэффициент α показывает увеличение несущей способности балки вследствие учета нелинейности и допущения работы балки для напряжений $\sigma \in [\sigma_n; \sigma_B]$.

Пусть балка находится в предельном состоянии, тогда согласно (3.2), (3.3)

$$\varepsilon_B = -\frac{h}{2} w'' = -\frac{1}{2} f_1 = \sqrt{\frac{E}{3C}}, \quad f_1 = -3 \frac{\sigma_B}{E}. \quad (3.6)$$

Подстановкой предельного значения f_1 из (3.6) в уравнение (3.5) для коэффициента α получается

$$\alpha = 1,2 \frac{\sigma_B}{\sigma_n} \quad (\sigma_B > \sigma_n), \quad (3.7)$$

и увеличение несущей способности балки очевидно. 4. Пусть $B \neq 0$, $C = 0$ тогда

$$\sigma = E\varepsilon - B\varepsilon^2. \quad (4.1)$$

В этом случае материал по-разному сопротивляется растяжению и сжатию, а влиянием нелинейности более высокого (кубического) порядка пренебрегается. Функция (4.1) имеет единственный экстремум (максимум) в точке

$$\varepsilon_{B+} = \frac{E}{2B} \quad \text{и} \quad \max \sigma = \frac{E^2}{4B} = \sigma_{B+}, \quad (4.2)$$

откуда

$$B = \frac{E^2}{4\sigma_{B+}}, \quad \varepsilon_{B+} = 2 \frac{\sigma_{B+}}{E} \quad \sigma = E \left(1 - \frac{E}{4\sigma_{B+}} \varepsilon \right) \varepsilon. \quad (4.3)$$

Из третьего соотношения (4.3) при $\sigma = -\sigma_{B-}$ для ε_{B-} получается

$$\varepsilon_{B-} = -2 \frac{\sigma_{B-}}{E} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma_{B-}}{\sigma_{B+}}} - 1 \right). \quad (4.4)$$

В рассматриваемом случае из системы уравнений (1.12) для $f_1 = hw''$, $f_2 = u'$ получается

$$\begin{aligned} f_1 - 2 \frac{B}{E} f_2 f_1 &= -\frac{h}{EI} M_0, \\ f_2^2 - \frac{E}{B} f_2 + \frac{1}{12} f_1^2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Подстановкой в (4.5) значения B из (4.3) и $M_0 = 2\alpha I \sigma_n / h$ получается система

$$f_1 - \frac{E}{42\sigma_{B+}} f_2 f_1 + 2\alpha_1 \frac{\sigma_{B+}}{E} = 0 \quad \left(\alpha_1 = \frac{\sigma_n}{\sigma_{B+}} \alpha \right), \quad (4.6)$$

$$f_2^2 - \frac{4\sigma_{B+}}{E} f_2 + \frac{1}{12} f_1^2 = 0,$$

решение которой суть

$$f_1 = -2 \frac{\sigma_{B+}}{E} \sqrt{6 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\alpha_1^2}{3}} \right)}, \quad f_2 = 2 \frac{\sigma_{B+}}{E} \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2} - \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\alpha_1^2}{3}} \right)} \right). \quad (4.7)$$

При (4.7) из условия $\varepsilon_{B+} = f_2 - [1/2]f_1 = 2[(\sigma_{B+})/E]$ получается предельное значение α в зоне растяжений

$$\alpha_+ = 1,5 \frac{\sigma_{B+}}{\sigma_n} \quad (\sigma_{B+} > \sigma_n), \quad (4.8)$$

которое показывает увеличение несущей способности по сравнению с линейной задачей в зоне растяжения.

Однако необходимо удовлетворение условию прочности и в зоне сжатия балки. Тогда

$$\varepsilon_{B-} = f_2 + \frac{1}{2} f_1 = -2 \frac{\sigma_{B+}}{E} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma_{B-}}{\sigma_{B+}}} - 1 \right), \quad (4.9)$$

откуда для α получается

$$\alpha_- = \frac{3\sigma_{B+}}{4\sigma_n} \left(\frac{\sigma_{B-}}{\sigma_{B+}} - 1 \right) + \sqrt{\frac{3}{4} \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\sigma_{B-}}{\sigma_{B+}} - 1 \right)^2 \right]}. \quad (4.10)$$

Как показывают расчеты,

$$\begin{aligned} 0,866 \frac{\sigma_{B+}}{\sigma_n} \leq \alpha_- \leq \frac{\sigma_{B+}}{\sigma_n} \quad \text{при} \quad 1 \leq \frac{\sigma_{B-}}{\sigma_{B+}} \leq 1,185, \\ \frac{\sigma_{B+}}{\sigma_n} \leq \alpha_- \leq 1,5 \frac{\sigma_{B+}}{\sigma_n} \quad \text{при} \quad 1,185 \leq \frac{\sigma_{B-}}{\sigma_{B+}} \leq 2, \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$1,5 \frac{\sigma_{B+}}{\sigma_n} \leq \alpha_- \leq \sqrt{3} \frac{\sigma_{B+}}{\sigma_n} \quad \text{при} \quad 2 \leq \frac{\sigma_{B-}}{\sigma_{B+}} \leq 3.$$

Таким образом, при $\sigma_{B-}/\sigma_{B+} \in [1;2]$ активным является ограничение на деформации сжатия, а при $\sigma_{B-}/\sigma_{B+} = 2$ ограничения на деформации растяжения и сжатия дают одинаковые значения для несущей способности

$$\alpha_+ = \alpha_- = 1,5 \frac{\sigma_{B+}}{\sigma_n}.$$

При $\sigma_{B-}/\sigma_{B+} > 2$ активным является ограничение на деформации растяжения и $\alpha = 1,5\sigma_{B+}/\sigma_n$.

Представляет интерес нахождение нейтральной оси балки ($\sigma = 0 \Rightarrow \varepsilon = 0$).

Для деформации $\varepsilon = f_2 - [z/h]f_1$ по формулам (4.7) получается

$$\varepsilon = 2 \frac{\sigma_{B+}}{E} \left[1 - \sqrt{0,5 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\alpha_1^2}{3}} \right)} + \frac{z}{h} \sqrt{6 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\alpha_1^2}{3}} \right)} \right], \quad (4.12)$$

и из условия $\varepsilon = 0$

$$\frac{z}{h} = - \frac{1 - \sqrt{0,5 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\alpha_1^2}{3}} \right)}}{\sqrt{6 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\alpha_1^2}{3}} \right)}}. \quad (4.13)$$

Ниже, по формуле (4.13) для некоторых значений σ_{B-}/σ_{B+} и соответствующих α приводятся значения z/h :

$$\begin{aligned} \sigma_{B-}/\sigma_{B+} &= 1 & (\alpha &= 0,866\sigma_{B+}/\sigma_n), & z/h &= -0,038, \\ \sigma_{B-}/\sigma_{B+} &= 1,18 & (\alpha &= \sigma_{B+}/\sigma_n), & z/h &= -0,045, \\ \sigma_{B-}/\sigma_{B+} &= 2 & (\alpha &= 1,5\sigma_{B+}/\sigma_n), & z/h &= -0,077, \\ \sigma_{B-}/\sigma_{B+} &= 3 & (\alpha &= \sqrt{3}\sigma_{B+}/\sigma_n), & z/h &= -0,12. \end{aligned} \quad (4.14)$$

5. Рассмотрим теперь более общий случай закона упругости (1.3)

$$\sigma = E\varepsilon - B\varepsilon^2 - C\varepsilon^3.$$

Согласно (1.7), (1.13)

$$f_2 = \varepsilon - \frac{z}{h} f_1,$$

откуда при $z = \pm 0,5h$

$$f_{2+} = \varepsilon_{B+} + \frac{1}{2} f_1, \quad f_{2-} = \varepsilon_{B-} - \frac{1}{2} f_1, \quad (5.1)$$

где ε_{B+} , ε_{B-} - предельные значения деформаций растяжения и сжатия определяются формулами (1.4). Подстановкой (5.1) в первое уравнение системы (1.12) для определения параметров нагрузки для растяжения и сжатия α_+ , α_- получаются формулы

$$\alpha_+ = \frac{9C}{20\sigma_n} \left(f_{1+} + \frac{10B}{9C} \gamma \right) f_{1+}^2, \quad \alpha_- = \frac{9C}{20\sigma_n} \left(f_{1-} + \frac{10B}{9C} \gamma \right) f_{1-}^2, \quad (5.2)$$

где f_{1+} , f_{1-} соответственно определяются из уравнений

$$f_{1+}^3 + \frac{4B}{3C} \gamma f_{1+}^2 - \frac{4\sigma_{B+}}{C} = 0, \quad (5.3)$$

$$f_{1-}^3 + \frac{4B}{3C} \gamma f_{1-}^2 - \frac{4\sigma_{B-}}{C} = 0.$$

Здесь $\min(\alpha_+, \alpha_-)$ определяет параметр несущей способности балки.

Из уравнений (5.1)-(5.3), при (1.4), (1.6), для определения α_+ , α_- получаются уравнения

$$\alpha_{1\pm}^3 - (5,4 - K_{\pm}) \alpha_{1\pm}^2 + (9,72 - 3K_{\pm}) \alpha_{1\pm} - \left(5,832 - \frac{9K_{\pm}}{4} \right) = 0, \quad (5.4)$$

где

$$\alpha_{1+} = \frac{\sigma_n}{\sigma_{B+}} \alpha_+, \quad \alpha_{1-} = \frac{\sigma_n}{\sigma_{B-}} \alpha_-, \quad K_+ = \frac{8B^3 \gamma^3}{45\sigma_{B+} C^2}, \quad K_- = \frac{8B^3 \gamma^3}{45\sigma_{B-} C^2}.$$

Для балки из боропластика с характеристиками $\sigma_-/\sigma_{B+} = 2$, $E/\sigma_{B+} = 150$, $E = 20,6 \cdot 10^{10}$ Па получается

$$\min (\alpha_+, \alpha_-) = \alpha_+ = 1,35 \frac{\sigma_{B+}}{\sigma_{B-}}.$$

В заключение отметим, что в рассмотренной нелинейной постановке решение даже для простейшей задачи изгиба балки связано с определенными трудностями. Подход к решению задач изгиба упругих балок из материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию, можно найти в [1], где рассматриваются два варианта аппроксимации графика зависимости деформация - напряжение - билинейный закон упругости и с двумя степенными законами.

В работах [2,3] разработаны варианты теории упругости разномодульных тел, предполагающие различные линейные зависимости для напряжений растяжения и сжатия от соответствующих деформаций. Такой подход дает реальную возможность для решения многих, более сложных, задач теории упругости, в том числе для пластинок и оболочек.

Институт механики НАН РА

Литература

1. Тимошенко С. Р. Курс сопротивления материалов. М.- Л. Гостехиздат. 1931. 571 с.
2. Амбарцумян С. А. Разномодульная теория упругости. М. Наука. 1982. 317 с.
3. Амбарцумян С. А. Сопротивление материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. Ереван. Изд. РАУ. 2004. 187 с.

Ակադեմիկոս Ս. Ա. Համբարձումյան, Վ. Յ. Գնունի

**Ոչ գծային առաձգական հեծանի ծոման մասին՝ ձգմանը և սեղմմանը նյութի տարբեր
ձևով դիմադրության հաշվառմամբ**

Աշխատանքում դիտարկվում է ոչ գծային առաձգական նյութից պատրաստված հեծանի մաքուր ծոման խնդիրը: Լարումների և դեֆորմացիաների կապը վերցվում է աստիճանային ֆունկցիայի տեսքով, որը պարունակում է դեֆորմացիայի մինչև երրորդ աստիճանը ներառյալ: Առաձգականության ընդունված օրենքը ենթադրում է նյութի ամրության տարբեր սահմաններ ձգման և սեղմման դեպքերում, որը և հնարավորություն է ընձեռում հաշվի առնել հեծանի նյութի ձգմանը և սեղմմանը տարբեր ձևերով դիմադրելու հատկությունը:

Դիտարկվում են լարում-դեֆորմացիա կապի տարբեր դեպքեր, և հաշվվում է հեծանի կրողունակությունը:

Academician S. A. Ambartsumian, V. Ts. Gnuni

**The Flexion of Non-linear Elastic Beam Taking into Consideration the Material Resistance
to the Tension and Compression in Different Ways**

The problem of the pure flexion of the beam made of non-linear elastic material is observed in the work. The link between the stresses and deformations is taken as a grade function, which contains up to the third degree of deformation inclusive. The accepted law of elasticity implies different limits of solidity of the material in cases of tension and compression of the material of the beam in different ways.

Different cases of the stress-deformation link are observed, and the capacity of the beam is calculated.