

УДК 531.8

Р. М. Киракосян

Об уточненных уравнениях устойчивости анизотропных пластин

(Представлено академиком С. А. Амбарцумяном 22/VII 2004)

1. Система уравнений устойчивости трехмерной теории упругости перед последним упрощением имеет вид ([1], с. 155, система v.13):

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma'_{xx} + e'_{xx} \sigma_{xx}^0 + \left(\frac{1}{2} e'_{xy} - \omega'_z \right) \sigma_{xy}^0 + \left(\frac{1}{2} e'_{xz} + \omega'_y \right) \sigma_{xz}^0 \right] + \\
 & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\sigma'_{xy} + e'_{xx} \sigma_{xy}^0 + \left(\frac{1}{2} e'_{xy} - \omega'_z \right) \sigma_{yy}^0 + \left(\frac{1}{2} e'_{xz} + \omega'_y \right) \sigma_{yz}^0 \right] + \\
 & + \frac{\partial}{\partial z} \left[\sigma'_{xz} + e'_{xx} \sigma_{xz}^0 + \left(\frac{1}{2} e'_{xy} - \omega'_z \right) \sigma_{yz}^0 + \left(\frac{1}{2} e'_{xz} + \omega'_y \right) \sigma_{zz}^0 \right] = 0, \text{ Cycl.}
 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь σ_{ij}^0 - напряжения исходного состояния равновесия, σ'_{ij} , e'_{ij} и ω'_{ij} - дополнительные напряжения, деформации и углы поворотов, возникающие вследствие потери устойчивости.

Для e'_{ij} и ω'_{ij} имеем [1]:

$$\begin{aligned}
 e'_{xx} &= \frac{\partial u'}{\partial x}, \quad e'_{yy} = \frac{\partial v'}{\partial y}, \quad e'_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad e'_{xy} = \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x}, \quad e'_{yz} = \frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad e'_{xz} = \frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \\
 \omega'_x &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z} \right), \quad \omega'_y = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \omega'_z = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right),
 \end{aligned} \quad (1.2)$$

где u' , v' , w - дополнительные перемещения по осям x, y, z соответственно.

Пренебрегая членами, умноженными на e'_{ij} , по сравнению с членами, умноженными на ω'_{ij} , система (1.1) приводится к окончательному виду ([1], с. 157, система (v. 16)):

$$\frac{\partial}{\partial x} (\sigma'_{xx} - \omega'_z \sigma_{xy}^0 + \omega'_y \sigma_{xz}^0) + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma'_{xy} - \omega'_z \sigma_{yy}^0 + \omega'_y \sigma_{yz}^0) +
 \quad (1.3)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} (\sigma'_{xz} - \omega'_z \sigma_{yz}^0 + \omega'_y \sigma_{zz}^0) = 0, \text{ Cycl.}$$

В результате этого упрощения члены типа $[1/2]e'_{ij} \pm \omega'_k$, точные значения которых равны $[(\partial u'_i)/(\partial x_j)]$, заменяются их приближенными значениями $[1/2][(\partial u'_i)/(\partial x_j)] - [(\partial u'_j)/(\partial x_i)]$. Например, члены

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} e'_{zx} - \omega'_y &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \frac{1}{2} e'_{zy} + \omega'_x &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z} \right) = \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.4)$$

заменяются значениями

$$-\omega'_y = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial z} \right) \text{ и } \omega'_x = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z} \right)$$

соответственно. В силу этого при составлении уравнений устойчивости пластин на основе системы (1.3) в выражении фиктивной поперечной нагрузки Z_2 появляются лишние члены, имеющие характер поперечных сдвигов [2]. Поэтому в теории пластин более предпочтительной следует считать систему (1.1), применение которой не связано с особо серьезными трудностями и не приводит к появлению отмеченных членов.

2. Рассмотрим прямоугольную пластину постоянной толщины h_0 и размеров в плане a_0, b_0 . Материал пластины в каждой точке имеет лишь одну плоскость упругой симметрии, параллельную срединной плоскости. Пластину отнесем к правой системе декартовых координат $Oxuz$, совместив плоскость Oxu со срединной плоскостью пластины. Пусть в пластине создано однородное напряженное состояние

$$\sigma_{xx}^0, \sigma_{yy}^0, \sigma_{xy}^0, \quad \sigma_{xz}^0 = \sigma_{yz}^0 = \sigma_{zz}^0 = 0. \quad (2.1)$$

Рассмотрим задачу устойчивости пластины с учетом влияний поперечных сдвигов, нормального напряжения σ'_{zz} и изменения первоначальных размеров h_0, a_0, b_0 . При составлении уравнений устойчивости будем исходить из сравнительно более точной системы (1.1).

Пользуясь законом Гука анизотропного тела и геометрически линейными соотношениями [3], для толщины и размеров в плане в момент наступления потери устойчивости с учетом (2.1) будем иметь:

$$\begin{aligned}
h &= h_0(1 + e_{zz}^0) = h_0(1 + a_{13}\sigma_{xx}^0 + a_{23}\sigma_{yy}^0 + a_{36}\sigma_{xy}^0), \\
a &= a_0(1 + e_{xx}^0) = a_0(1 + a_{11}\sigma_{xx}^0 + a_{12}\sigma_{yy}^0 + a_{16}\sigma_{xy}^0), \\
b &= b_0(1 + e_{yy}^0) = b_0(1 + a_{12}\sigma_{xx}^0 + a_{22}\sigma_{yy}^0 + a_{26}\sigma_{xy}^0).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь a_{ij} - упругие постоянные материала.

Влияния поперечных сдвигов будем учитывать на основе уточненной теории пластин [3]. В рамках этой теории

$$\sigma'_{xz} = -\frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \varphi(x, y), \quad \sigma'_{yz} = -\frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \psi(x, y), \tag{2.3}$$

где φ и ψ - функции, характеризующие распределение поперечных сдвигов, возникающих вследствие потери устойчивости пластины.

С учетом (2.3), закона Гука и геометрических соотношений имеем:

$$\begin{aligned}
e'_{xx} &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \left(a_{55} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + a_{45} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right), \quad \frac{1}{2} e'_{xz} - \omega'_y = \frac{\partial w}{\partial x}, \\
e'_{yy} &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \left(a_{44} \frac{\partial \psi}{\partial y} + a_{45} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right), \quad \frac{1}{2} e'_{yz} + \omega'_x = \frac{\partial w}{\partial y}, \\
\frac{1}{2} e'_{xy} - \omega'_z &= \frac{\partial u'}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \left(a_{55} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + a_{45} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right), \\
\frac{1}{2} e'_{xy} + \omega'_z &= \frac{\partial v'}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \left(a_{44} \frac{\partial \psi}{\partial y} + a_{45} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Умножив первые два уравнения системы (1.1) на zdz , а третье уравнение - на dz и проинтегрировав полученные уравнения по толщине пластины, с учетом (1.1), (2.3), (2.4) и нулевых поверхностных условий находим:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = N_x + \frac{h^3}{12} \left\{ \sigma_{xx}^0 \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{h^2}{10} \left(a_{55} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + a_{45} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \right] + \sigma_{yy}^0 \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{h^2}{10} \left[a_{55} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + a_{45} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right] + 2\sigma_{xy}^0 \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \frac{h^2}{10} \left[a_{55} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + a_{45} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right] \right], \\
& \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = N_y + \frac{h^3}{12} \left\{ \sigma_{yy}^0 \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \frac{h^2}{10} \left(a_{44} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + a_{45} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) \right] + \sigma_{xx}^0 \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{h^2}{10} \left(a_{44} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + a_{45} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) \right] + 2\sigma_{xy}^0 \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \frac{h^2}{10} \left(a_{44} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + a_{45} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right) \right] \right\}, \\
& \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = -h \left(\sigma_{xx}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma_{yy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\sigma_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right). \tag{2.5}
\end{aligned}$$

Через M_x , M_y , M_{xy} и N_x , N_y обозначены моменты и поперечные силы пластины соответственно.

Сравним эти уравнения с уравнениями изгиба пластины [3]

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = N_x - hX_1, \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = N_y - hY_1, \quad \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = -Z_2, \tag{2.6}$$

где

$$X_1 = (X^+ - X^-)/2, \quad Y_1 = (Y^+ - Y^-)/2, \quad Z_2 = Z^+ + Z^-, \tag{2.7}$$

$X^\pm$, $Y^\pm$, $Z^\pm$ - интенсивности поверхностной нагрузки по осям x, y, z на поверхностях $z = \pm h/2$ соответственно. Это сравнение приводит к равенствам:

$$\begin{aligned}
X_1 = & -\frac{h^2}{12} \left\{ \sigma_{xx}^0 \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{h^2}{10} \left(a_{55} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + a_{45} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \right] + \sigma_{yy}^0 \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{h^2}{10} \left(a_{55} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + a_{45} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \right] + 2\sigma_{xy}^0 \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \frac{h^2}{10} \left(a_{55} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + a_{45} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) \right] \right\}, \tag{2.8}
\end{aligned}$$

$$Y_1 = -\frac{h^3}{12} \left\{ \sigma_{yy}^0 \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \frac{h^2}{10} \left(a_{44} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + a_{45} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) \right] + \sigma_{xx}^0 \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \right. \right. \tag{2.9}$$

$$-\frac{h^2}{10} \left[a_{44} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + a_{45} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right] + 2\sigma_{xy}^0 \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \frac{h^2}{10} \left(a_{44} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + a_{45} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right) \right],$$

$$Z_2 = T_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (2.10)$$

Здесь T_x^0, T_y^0, S^0 - тангенциальные усилия исходного состояния пластины:

$$T_x^0 = \sigma_{xx}^0 h, \quad T_y^0 = \sigma_{yy}^0 h, \quad S^0 = \sigma_{xy}^0 h. \quad (2.11)$$

Смысл (2.8)-(2.10) заключается в том, что уравнения устойчивости пластины можно формально рассматривать как уравнения задачи изгиба при действии фиктивной поверхностной нагрузки с компонентами X_1, Y_1, Z_2 . Однако смысл X_1 и Y_1 следует понимать с особой оговоркой. А именно, они не входят в выражения усилий и моментов, но фигурируют в первых двух уравнениях (2.6).

Имея в виду формулы [3],

$$N_x = \frac{h^3}{12} \varphi, \quad N_y = \frac{h^3}{12} \psi. \quad (2.12)$$

Из третьего уравнения (2.5) после соответствующих дифференцирований заключаем, что члены выражений (2.8) и (2.9) с участием вторых производных функций φ и ψ пренебрежительно малы по сравнению с теми членами этих выражений, в которых фигурируют третьи производные прогиба пластины w . Для наглядности рассмотрим одномерный случай, когда $\psi = 0$, а φ и w зависят только от координаты x .

Тогда

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{12}{h^2} \sigma_{xx}^0 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \Rightarrow \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -\frac{12}{h^2} \sigma_{xx}^0 \frac{d^3 \varphi}{dx^3}. \quad (2.13)$$

В силу этого

$$X_1 = -\frac{h^2}{12} \sigma_{xx}^0 \left(1 + \frac{6}{5} a_{55} \sigma_{xx}^0 \right) \frac{d^3 w}{dx^3}. \quad (2.14)$$

Поскольку $a_{55} = 1/G_{13}$, где G_{13} - модуль сдвига материала в плоскости Oxz , то член $6a_{55}\sigma_{xx}^0/5$ в несколько тысяч раз меньше единицы и им можно свободно пренебречь. Таким образом, в выражениях (2.8) и (2.9) следует оставить только члены с участием производных прогиба. Выражения компонент фиктивной поверхностной нагрузки примут следующий

окончательный вид:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= -\frac{h}{12} \left(T_x^0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + T_y^0 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + 2S^0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) = -\frac{h}{12} \frac{\partial Z_2}{\partial x}, \\
 Y_1 &= -\frac{h}{12} \left(T_y^0 \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + T_x^0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 2S^0 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = -\frac{h}{12} \frac{\partial Z_2}{\partial y}, \\
 Z_2 &= T_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Выражение фиктивной поперечной нагрузки Z_2 совпадает с аналогичным выражением классической теории пластин [4].

Подставив выражения усилий и моментов [3] в (2.5), с учетом (2.15) получим окончательные уравнения устойчивости анизотропных пластин при учете влияний поперечных сдвигов, нормального напряжения σ_z и изменения размеров:

$$\begin{aligned}
 &(B_{11} + \sigma_{xx}^0) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66} + \sigma_{yy}^0) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + (3B_{16} + 2\sigma_{xy}^0) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + B_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \\
 &-\frac{h^2}{10} \left[(a_{55}B_{11} + a_{45}B_{16} + A_1) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + (2a_{55}B_{16} + a_{45}B_{12} + a_{45}B_{66} + A_3) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \right. \\
 &+ (a_{55}B_{66} + a_{45}B_{26}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + (a_{45}B_{11} + a_{44}B_{16}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + (2a_{45}B_{16} + a_{44}B_{12} + a_{44}B_{66} + \\
 &+ A_1) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + (a_{45}B_{66} + a_{44}B_{26} + A_3) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \left. \right] + \varphi = 0, \\
 &(B_{22} + \sigma_{yy}^0) \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (B_{12} + 2B_{66} + \sigma_{xx}^0) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + (3B_{26} + 2\sigma_{xy}^0) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \\
 &-\frac{h^2}{10} \left[(a_{44}B_{22} + a_{45}B_{26} + A_2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + (2a_{44}B_{26} + a_{45}B_{12} + a_{45}B_{66} + A_3) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (a_{44}B_{66} + a_{45}B_{16}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + (a_{45}B_{22} + a_{55}B_{26}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + (2a_{45}B_{26} + a_{55}B_{12} + a_{55}B_{66} + \\
& + A_2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + (a_{45}B_{66} + a_{55}B_{16} + A_3) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big] + \psi = 0, \\
& \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{12}{h^2} \left(\sigma_{xx}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma_{yy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

С целью оценки влияния тангенциальных компонент фиктивной поверхностной нагрузки на значения критических напряжений пластины рассмотрим одномерный случай. Для критического значения сжимающего напряжения $\sigma_{xx}^0 = -\sigma^0$ шарнирно-опертой по краям бесконечной полосы в рамках классической теории пластин получаем:

$$\sigma_{кл}^0 = \frac{B_{11}\pi^2 h^2}{12a^2}, \quad \sigma^0 = \frac{B_{11}\pi^2 h^2}{12a^2 + \pi^2 h^2}. \tag{2.17}$$

Здесь a - ширина полосы, $\sigma_{кл}^0$ соответствует случаю неучета, а σ^0 - случаю учета X_1 . Как и следовало ожидать, $\sigma^0 < \sigma_{кл}^0$, т.е. учет тангенциальной фиктивной нагрузки приводит к уменьшению величины критического напряжения. Поправка в процентах составляет:

$$\Delta = \frac{\sigma_{кл}^0 - \sigma^0}{\sigma_{кл}^0} 100\% = \frac{100\pi^2 h^2}{12a^2 + \pi^2 h^2}. \tag{2.18}$$

В случаях $h/a = 1/5$ и $1/4$ имеем $\Delta \approx 3$ и 5% соответственно.

Для сравнения отметим, что поправка только от поперечного сдвига будет:

$$\Delta = \frac{\sigma_{кл}^0 - \sigma^0}{\sigma_{кл}^0} 100\% = \frac{100a_{55}B_{11}\pi^2 h^2}{10a^2 + a_{55}B_{11}\pi^2 h^2}. \tag{2.19}$$

При $a_{55}B_{11} = 3$, $h/a = 1/5$ и $1/4$ эта поправка составляет 10.6 и 15.6% соответственно. Следовательно, влияние тангенциальной фиктивной нагрузки в рассматриваемом случае примерно в 3 раза меньше влияния поперечного сдвига. Не исключено, что картина может существенно измениться в случае анизотропных пластин конечных размеров.

В работе [2] уравнения устойчивости ортотропных пластин при учете влияния поперечных

сдвигов выведены исходя не из системы (1.1), а из сравнительно грубой системы (1.3). В этой работе тангенциальные компоненты фиктивной нагрузки X_1, Y_1 не учитываются, а для поперечной компоненты Z_2 в обозначениях [3] получается выражение

$$Z_2 = T_x^0 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{h^2}{16} a_{55} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] + T_y^0 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{h^2}{16} a_{44} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] + S^0 \left[2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{h^2}{16} \left(a_{55} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + a_{44} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right]. \quad (2.20)$$

В отличие от (2.15) выражение (2.20) содержит слагаемые с производными функций φ и ψ , что автор считает результатом более последовательного подхода. Однако, как было показано выше, при использовании более точной системы (1.1) такие члены не появляются. Следовательно, появление этих членов является следствием того, что при выводе третьего уравнения устойчивости (2.16) величины $\partial w / \partial x$ и $\partial w / \partial y$ заменены их приближенными значениями $(\partial w / \partial x - \partial u' / \partial z) / 2$ и $(\partial w / \partial y - \partial v' / \partial z) / 2$ соответственно. Добавим, что при получении этого уравнения допущена арифметическая неточность, по причине которой в выражении (2.20) вместо множителя $-h^2/24$ фигурирует множитель $h^2/16$. Эта неточность и привела к заметному понижению значения критической нагрузки пластины в рассматриваемой конкретной задаче [2]. Отметим, что замена неточного множителя на его точное значение приводит к малому увеличению критической нагрузки [2] по сравнению с [5].

3. Краевые условия задачи устойчивости пластин при учете изменения размеров формулируются как обычно [3], только с той разницей, что в этих условиях вместо первоначальных известных размеров a_0 и b_0 фигурируют неизвестные размеры a и b , соответствующие моменту наступления потери устойчивости. Это приведет к дополнительным осложнениям при решении конкретных задач.

Институт механики НАН РА

Литература

1. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. М.-Л. Гос. изд. технико-теоретич. литературы. 1948. 212 с.
2. Томашевский В.Т. - Труды VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Баку. 1966. М. Наука. 1966. С. 753-761.
3. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М. Наука. 1987. 360 с.
4. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М. Физматгиз. 1963. 880 с.
5. Амбарцумян С.А., Хачатрян А.А. - Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1960. N1. С.113-123.

Ռ. Մ. Կիրակոսյան

Անիզոտրոպ սալերի կայունության ճշգրտված հավասարումների վերաբերյալ

Օգտվելով առաձգական կայունության եռաչափ հավասարումներից [1]՝ արտածված են անիզոտրոպ սալերի ստատիկական կայունության հավասարումները ճշգրտված [3] տեսության հիման վրա: Հաշվի են առնված ընդլայնական սահքերի, նորմալ σ_z լարման և սալի չափերի փոփոխության ազդեցությունները:

R. M. Kirakosyan

On the Refined Stability Equations of Anisotropic Plates

Statical stability equations of anisotropic plates are derived from three dimensional stability equations [1] based on refined theory [3]. Transverse shears, normal stress and the variation of plates dimensions are taken into account.