УДК 519.1

С. В. Баликян, Р. Р. Камалян

Об NP-полноте задачи существования локально-сбалансированного 2-разбиения двудольных графов G с $\Delta(G) = 3$

(Представлено академиком Ю.Г. Шукуряном 17/VI 2004)

В работе рассматриваются неориентированные графы без кратных ребер и петель. Множество вершин графа G обозначается через V(G), множество ребер - через E(G). Наибольшая из степеней вершин графа G обозначается через $\Delta(G)$.

Для вершины $v \in V(G)$ определим множество $\lambda(v) = \{w \in V(G)/(w,v) \in E(G)\}$. 2-разбиением графа G называется функция $f : V(G) \to \{0,1\}$. 2-разбиение f графа G называется локально-сбалансированным, если для любой вершины $v \in V(G)$

$$||\{ w \in \lambda(v)/f(w) = 1\}| - |\{w \in \lambda(v)/f(w) = 0\}|| \le 1.$$

Не определяемые понятия можно найти в [1-5].

Пусть $X = \{ x_1,\ldots,x_n\}$ есть множество булевых переменных. Обозначим через $\tilde{X} = \{x_1,\ldots,x_n, \bar{x}_1,\ldots, \bar{x}_n\}$ множество литералов переменных множества X. Пусть $D = \{ D_1,D_2,\ldots,D_r\}$ есть множество дизъюнкций, состоящих из литералов множества $\tilde{X}$. Через $\tau(D_j)$ обозначим множество индексов тех переменных, литералы которых включены в дизъюнкцию D_j, $j = 1, 2, \ldots, r$. Пусть $K(x_1,x_2,\ldots,x_n) = D_1\& D_2\&\ldots\& D_r$ - конъюнктивная нормальная форма [6]. Для $i = 1, \ldots, n$ через $M(i,K)$ обозначим множество $\{D_{m(1,i)}, D_{m(2,i)}, \ldots, D_{m(s(i),i)}\}$ всех дизъюнкций из D, содержащих литерал переменной x_i (будем считать, что для $i = 1, \ldots, n$ имеет место неравенство $m(1,i) < m(2,i) < \ldots < m(s(i),i)$). Для $i = 1, \ldots, n$ через $M_1(i,K)$ обозначим множество тех дизъюнкций из $M(i,K)$, которые содержат литерал x_i, а через $M_2(i,K)$ - множество тех дизъюнкций из $M(i,K)$, которые содержат литерал $\bar{x}_i$. В [2] доказано, что NP-полной является

Задача 1: "3 - ВЫПОЛНИМОСТЬ".

Условие. Пусть X - множество булевых переменных, $K(x_1, x_2, \ldots, x_n) = D_1\& D_2\&\ldots\& D_r$ - конъюнктивная нормальная форма, каждая дизъюнкция которой содержит в точности 3 литерала из $\tilde{X}$.

Вопрос. Существует ли последовательность $(\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n)$, где для $i = 1, \ldots, n$ $\alpha_i \in \{0,1\}$, для которой $K(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 1$?

Задача 2:

Условие. Дан граф G.

Вопрос. Существует ли локально-сбалансированное 2-разбиение графа G?

Теорема. *Для двудольных графов* G *с* $\Delta(G) = 3$ *задача 2 NP-полна.*

Доказательство. Принадлежность задачи 2 классу NP очевидна.

Опишем полиномиальный алгоритм, сводящий задачу 1 к задаче 2 для двудольных графов G с $\Delta(G) = 3$. Пусть в индивидуальной задаче I задачи 1 $X = \{ x_1, \ldots, x_n\}$ есть множество переменных, и $K(x_1, x_2, \ldots, x_n) = D_1 \& D_2 \& \ldots \& D_r$ есть конъюнктивная нормальная форма. Определим граф G(I).

Для $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, r$ положим:

$$V_{ij} = \begin{cases} \varnothing, & \text{если } D_j \notin M(i,K) \\ \{u_{i,j,1}\}, & \text{если } D_j \in M_1(i,K) \\ \{u_{i,j,1}, u_{i,j,2}, u_{i,j,3}\}, & \text{если } D_j \in M_2(i,K) \end{cases}$$

Для $j = 1, \ldots, r$ положим:

$$V_j^1 = \bigcup_{i=1}^{n} V_{ij}$$

Для $j = 1, \ldots, r$ положим:

$$V_j^2 = \{ t_{j,1}, t_{j,2}, t_{j,3}, t_{j,4}, t_{j,5}, t_{j,6}, t_{j,7}, t_{j,8}\}.$$

Для $j = 1, \ldots, r$ положим:

$$V_j = V_j^1 \cup V_j^2.$$

Положим $Z_r = \varnothing$.

Если $r > 1$, то для $j = 1, \ldots, r - 1$ положим:

$$Z_j = \{ z_1'(j), z_1''(j + 1), z_2(j,j + 1)\}.$$

Для $i = 1, \ldots, n$ при $s(i) > 1$ и $k = 1,\ldots,s(i) - 1$ положим:

$$W(i,k) = \{w_1'(i,m(k,i)),w_1''(i,m(k + 1,i)),w_2(i,m(k,i),m(k + 1,i))\}.$$

Для $i = 1, \ldots, n$ положим:

$$W_i^1 = \begin{cases} \varnothing, & \text{если } s(i) = 1 \\ \bigcup_{k=1}^{s(i)-1} W(i,k), & \text{если } s(i) > 1. \end{cases}$$

Для i = 1, …, n положим:

$$W_i^2 = \begin{cases} \varnothing, & \text{если } s(i) = 1 \\ \{w_{3,1}(i)\}, & \text{если } s(i) = 2 \\ \{w_{3,1}(i), w_{3,2}(i)\}, & \text{если } s(i) > 2. \end{cases}$$

Для i = 1, …, n положим:

$$W_i = W_i^1 \cup W_i^2.$$

Положим:

$$V(G(I)) = \left(\bigcup_{j=1}^{r} (V_j \cup Z_j) \right) \bigcup \left(\bigcup_{i=1}^{n} W_i \right).$$

Для i = 1, …, n, j = 1,…, r положим:

$$E_{ij}^1 = \begin{cases} \varnothing, & \text{если } D_j \notin M_2(i,K) \\ \{(u_{i,j,1}, u_{i,j,2}), (u_{i,j,2}, u_{i,j,3})\}, & \text{если } D_j \in M_2(i,K). \end{cases}$$

Для j = 1, …, r положим:

$$E_j^1 = \bigcup_{i=1}^{n} E_{ij}^1.$$

Для i = 1, …, n, j = 1, …, r положим:

$$E_{ij}^2 = \begin{cases} \varnothing, & \text{если } D_j \notin M(i,K) \\ \{(u_{i,j,1}, t_{j,1})\}, & \text{если } D_j \in M_1(i,K) \text{ и } i \neq \max \tau(D_j) \\ \{(u_{i,j,3}, t_{j,1})\}, & \text{если } D_j \in M_2(i,K) \text{ и } i \neq \max \tau(D_j) \\ \{(u_{i,j,1}, t_{j,5})\}, & \text{если } D_j \in M_1(i,K) \text{ и } i = \max \tau(D_j) \\ \{(u_{i,j,3}, t_{j,5})\}, & \text{если } D_j \in M_2(i,K) \text{ и } i = \max \tau(D_j). \end{cases}$$

Для j = 1, …, r положим:

$$E_j^2 = \bigcup_{i=1}^{n} E_{ij}^2.$$

Для j = 1, …, r положим:

$$E_j^3 = \{(t_{j,1}, t_{j,2}), (t_{j,2}, t_{j,3}), (t_{j,3}, t_{j,4}), (t_{j,4}, t_{j,5}), (t_{j,5}, t_{j,6}), (t_{j,6}, t_{j,7}), (t_{j,7}, t_{j,8})\}.$$

Положим $E_r^4 = \varnothing$.

Если $r > 1$, то для $j = 1, \ldots, r - 1$ положим:

$$E_j^4 = \{(t_{j,8}, z_1'(j)), (z_1'(j), z_2(j,j+1)), (z_2(j,j+1), z_1''(j+1)), (z_1''(j+1), t_{j+1,8})\}.$$

Для $i = 1, \ldots, n$ при $s(i) > 1$ и $k = 1, \ldots, s(i) - 1$ положим:

$$E_{ik}^5 = \{(u_{i,m(k,i),1}, w_1'(i,m(k,i))), (w_1'(i,m(k,i)), w_2(i,m(k,i), m(k+1,i))),$$

$$(w_2(i,m(k,i), m(k+1,i)), w_1''(i,m(k+1,i))), (w_1''(i,m(k+1,i)), u_{i,m(k+1,i),1})\}.$$

Для $i = 1, \ldots, n$ положим:

$$E_i^5 = \begin{cases} \varnothing, & \text{если } s(i) = 1 \\ \bigcup\limits_{k=1}^{s(i)-1} E_{ik}^5, & \text{если } s(i) > 1. \end{cases}$$

Для $i = 1, \ldots, n$ положим:

$$E_i^6 = \begin{cases} \varnothing, & \text{если } s(i) = 1 \\ \{(w_2(i,m(1,i), m(2,i)), w_{3,1}(i))\}, & \text{если } s(i) = 2 \\ \{(w_2(i,m(1,i), m(2,i)), w_{3,1}(i)), & \\ \quad (w_2(i,m(s(i)-1,i), m(s(i),i)), w_{3,2}(i))\}, & \text{если } s(i) > 2. \end{cases}$$

Положим:

$$E(G(I)) = \left(\bigcup_{j=1}^{r}\left(\bigcup_{p=1}^{4} E_j^p\right)\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} (E_i^5 \cup E_i^6)\right).$$

Граф $G(I)$ определен. Ясно, что $\Delta(G(I)) = 3$. С помощью лемм 1.1 и 1.2 работы [7] нетрудно показать, что $G(I)$ является двудольным графом.

Рассмотрим индивидуальную задачу I' задачи 2, в которой в качестве графа дан граф $G(I)$. Покажем, что в индивидуальной задаче I ответ положительный тогда и только тогда, когда в индивидуальной задаче I' ответ положительный.

Пусть для графа $G(I)$ существует локально-сбалансированное 2-разбиение f. Очевидно, что $f(t_{1,8}) = f(t_{2,8}) = \ldots = f(t_{r,8})$. Без потери общности можно считать, что $f(t_{1,8}) = 1$.

Легко видеть также, что для $i = 1, \ldots, n$

$$f(u_{i,m(1,i),1}) = f(u_{i,m(2,i),1}) = \dots = f(u_{i,m(s(i),i),1}).$$

Для $i = 1, \dots, n$ и $j = 1, \dots, r$ определим множество $V_{ij}^3 \subseteq V(G(I))$ следующим образом:

$$V^3_{ij} = \begin{cases} \varnothing, & \text{если } D_j \notin M(i,K) \\ \{u_{i,j,1}\}, & \text{если } D_j \in M_1(i,K) \\ \{u_{i,j,3}\}, & \text{если } D_j \in M_2(i,K). \end{cases}$$

Для $j = 1, \dots, r$ положим:

$$V_j^3 = \bigcup_{i=1}^{n} V_{ij}^3.$$

Легко видеть, что для $j = 1, \dots, r$

$$V_j^3 = (\lambda(t_{j,1})\backslash\{t_{j,2}\}) \bigcup (\lambda(t_{j,5})\backslash\{t_{j,4}, t_{j,6}\}).$$

Убедимся, что если для некоторого j_0, $1 \le j_0 \le r$, $f(t_{j_0,8}) = 1$, то существуют $l_0 \in \{1,3\}$ и $i_0 \in \tau(D_{j_0})$ такие, что $u_{i_0,j_0,l_0} \in V_{j_0}^3$ и $f(u_{i_0,j_0,l_0}) = 1$. Действительно, из $f(t_{j_0,8}) = 1$ следует $f(t_{j_0,6}) = 0$, откуда: либо $f(t_{j_0,4}) = 0$ и существует $l_0 \in \{1,3\}$ такое, что $u_{\max\tau(D_{j_0}),j_0,l_0} \in \lambda(t_{j_0,5})\backslash\{t_{j_0,4}, t_{j_0,6}\}$ и $f(u_{\max\tau(D_{j_0}),j_0,l_0}) = 1$, либо $f(t_{j_0,4}) = 1$, откуда $f(t_{j_0,2}) = 0$ и, следовательно, существуют $l_0 \in \{1,3\}$ и $i_0 \in \tau(D_{j_0})$, $i_0 \ne \max\tau(D_{j_0})$, для которых $u_{i_0,j_0,l_0} \in \lambda(t_{j_0,1})\backslash\{t_{j_0,2}\}$ и $f(u_{i_0,j_0,l_0}) = 1$. Следовательно, существуют функции $g_1:\{1,\dots,r\}\to\{1,3\}$ и $g_2:\{1, \dots, r\}\to\{1, \dots, n\}$ такие, что для $j = 1,\dots,r$ $g_2(j) \in \tau(D_j)$ и выполнены условия $u_{g_2(j),j,g_1(j)} \in V_j^3$ и $f(u_{g_2(j),j,g_1(j)}) = 1$. Определим набор $\mu \equiv (\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n)$ следующим образом. Для $i = 1,\dots,n$ положим $\mu_i = f(u_{i,m(1,i),1})$. Покажем, что $K(\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n) = 1$. Убедимся, что для любого j, $1 \le j \le r$ при $x_i = \mu_i$, $i = 1, \dots, n$, дизъюнкция D_j конъюнктивной нормальной формы $K(x_1,x_2,\dots,x_n)$ принимает значение 1. Если $D_j \in M_1(g_2(j),K)$, то $g_1(j) = 1$ и $\mu_{g_2(j)} = f(u_{g_2(j),\, m(1,g_2(j),1)}) = f(u_{g_2(j),j,1}) = 1$, и утверждение очевидно. Если $D_j \in M_2(g_2(j),K)$, то $g_1(j) = 3$ и $f(u_{g_2(j),j,3}) = 1$, откуда $f(u_{g_2(j),j,1}) = 0$. Но $f(u_{g_2(j),j,1}) = f(u_{g_2(j),\, m(1,g_2(j),1)}) = \mu_{g_2(j)}$, и утверждение доказано.

Теперь предположим, что существует набор $v \equiv (v_1,v_2,\dots,v_n)$, для которого $K(v_1,v_2,\dots,v_n) = 1$.

Опишем алгоритм построения функции F_ν:V(G(I)) $\rightarrow$ {0,1}, являющейся локально-сбалансированным 2-разбиением графа G(I).

Алгоритм:

Этап 1:

Для i = 1, …, n и j = m(1,i), m(2,i), …, m(s(i),i) положим $F_\nu(u_{i,j,1}) = v_i$.

Для i = 1, …, n и j = 1, …, r при $D_j \in M_2(i,K)$ положим

$$F_\nu(u_{i,j,3}) = 1 - F_\nu(u_{i,j,1}).$$

Для j = 1, …, r положим $F_\nu(t_{j,2}) = 1 - \max\limits_{V\in\lambda(t_{j,1})\setminus\{t_{j,2}\}} F_\nu(V)$.

Для j = 1,…, r положим $F_\nu(t_{j,4}) = 1 - F_\nu(t_{j,2})$.

Так как $K(v_1,v_2,\ldots,v_n) = 1$, то для j = 1, …, r, $\max\limits_{V\in\lambda(t_{j,5})\setminus\{t_{j,6}\}} F_\nu(V) = 1$.

Для j = 1, …, r положим $F_\nu(t_{j,6}) = 1 - \max\limits_{V\in\lambda(t_{j,5})\setminus\{t_{j,6}\}} F_\nu(V)$

Ясно, что $F_\nu(t_{1,6}) = F_\nu(t_{2,6}) = \ldots = F_\nu(t_{r,6}) = 0$.

Для j = 1, …, r положим $F_\nu(t_{j,8}) = 1$.

Для j = 1, …, r – 1 положим $F_\nu(z_2(j,j+1)) = 0$.

Для i = 1, …, n при s(i) > 1 и k = 1, …, s(i) – 1 положим $F_\nu(w_2(i,m(k,i), m(k+1,i))) = 1 - v_i$.

Этап 1 завершен.

Этап 2:

Для j = 1, …, r – 1 положим $F_\nu(z_1'(j)) = 0$, $F_\nu(z_1''(j+1)) = 1$.

Для j = 1, …, r – 1 положим $F_\nu(t_{j,7}) = 1$, $F_\nu(t_{j,5}) = 0$, $F_\nu(t_{j,3}) = 1$, $F_\nu(t_{j,1}) = 0$.

Положим $F_\nu(t_{r,7}) = 0$, $F_\nu(t_{r,5}) = 1$, $F_\nu(t_{r,3}) = 0$, $F_\nu(t_{r,1}) = 1$.

Для i = 1, …, n и j = 1, …, r при $D_j \in M_2(i,K)$ положим $F_\nu(u_{i,j,2}) = 1 - F_\nu(t_{j,1})$.

Для i = 1, …, n при s(i) > 2 и k = 2, …, s(i) – 1 положим $F_\nu(w_1''(i,m(k,i))) = 1$, $F_\nu(w_1'(i,m(k,i))) = 0$.

Для i = 1, …, n при s(i) > 1 положим:

$$F_\nu(w_1'(i,m(1,i))) = \begin{cases} 1 - F_\nu(t_{m(1,i),1}), & \text{если } D_{m(1,i)} \in M_1(i,K) \\ 1 - F_\nu(u_{i,m(1,i),2}), & \text{если } D_{m(1,i)} \in M_2(i,K) \end{cases}$$

$$F_\nu(w_1''(i,m(s(i),i))) = \begin{cases} 1 - F_\nu(t_{m(s(i),i),1}), & \text{если } D_{m(s(i),i)} \in M_1(i,K) \\ 1 - F_\nu(u_{i,m(s(i),i),2}), & \text{если } D_{m(s(i),i)} \in M_2(i,K) \end{cases}$$

Для i = 1, …, n при s(i) > 2 положим $F_\nu(w_{3,1}(i)) = 0$, $F_\nu(w_{3,2}(i)) = 1$.

Для i = 1, …, n при s(i) = 2 положим

$F_\nu(w_{3,1}(i)) = 1 - \max\ \{F_\nu(w_1'(i,m(1,i))),\ F_\nu(w_1''(i,m(2,i)))\}$.

Этап 2 завершен. Алгоритм завершен.

Легко видеть, что функция F_ν является локально-сбалансированным 2-разбиением графа G (I). Теорема доказана.

Настоящее исследование поддержано целевой программой 04-10-31 РА.

Ереванский государственный университет

Институт проблем информатики и автоматизации НАН РА

Литература

1. *Harary F.* Graph Theory. Addison-Wesley. Reading. MA. 1969.
2. *Cook S.A.* - Proc. 3rd Ann. ACM Symp. On Theory of Computing. Association for Computing Machinery. New York. 1971. P.151-158.
3. *Garey M.R., Jonson D.S.* Computers and Intractability: A Guid to the Theory of NP-completeness. San Francisco: W.H.Freman & Company. Publishers. 1979.
4. *Papadimitriou C.H., Steiglitz K.* Combinatorial optimization: Algorithms and Complexity. PRENTICE-HALL. INC Englewood Cliffs. New Jersey. 1982.
5. *Karp R.M.* In: Complexity of Computer Computations. Eds. R.E. Miller and J.W. Thatcher. Plenum Press. New York. 1972. P. 85-103.
6. *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. М. Наука. 1986. 384 с.
7. *Мкртчян В. В.* О сложности задач построения в графе максимальных паросочетаний специального типа. Диссертация на соискание степени магистра. ЕГУ. Факультет информатики и прикладной математики. Кафедра мат. методов и моделирования. Ереван. 2003. 20 с.

Ս. Վ. Բալիկյան, Ռ. Ռ. Քամալյան

$\Delta(G) = 3$ պայմանին բավարարող G երկկողմանի գրաֆների լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհման գոյության խնդրի NP-լրիվության մասին

Ապացուցված է NP-լրիվությունը մի խնդրի, որ էությունը $\Delta(G) = 3$ պայմանին բավարարող G երկկողմանի գրաֆների գագաթների բազմության, V_1 և V_2 չհատվող ենթաբազմությունների այնպիսի տրոհման գոյությունը պարզելու մեջ է, երբ գրաֆի յուրաքանչյուր v գագաթի $\lambda(v)$ գագաթային շրջակայքում տեղի ունենա $||\lambda(v) \cap V_1| - |\lambda(v) \cap V_2|| \leq 1$ անհավասարությունը:

S.V. Balikyan, R.R. Kamalian

On NP-completeness of the Problem of Existence of Locally-balanced 2-partition for Bipartite Graphs G with $\Delta(G) = 3$

For bipartite graphs G with $\Delta(G) = 3$ the NP-completeness is shown for the problem of such partition of the set of vertices of G in two sets V_1 and V_2, which satisfies the condition $||\lambda(v) \cap V_1| - |\lambda(v) \cap V_2|| \leq 1$ for all vertices of G, where $\lambda(v)$ is the set of adjacent vertices of v.