

УДК 517.538.5

В. А. Мартиросян, А. З. Мартиросян

Многократно Т-универсальные функции, представимые лакунарными степенными рядами

(Представлено академиком Н.У. Арзуманяном 15/1 2004)

В настоящей работе продолжено исследование вопросов конструирования голоморфных функций, представимых степенными рядами с наперед заданными лакунами и многократно универсальных (в том или ином смысле) относительно определенной простой последовательности операций, сохраняющей лакуны исходного степенного ряда начатое в [1]. Полученные в указанной статье результаты относились к случаю целых функций. В данной работе аналогичные вопросы рассматриваются для функций, голоморфных в круге или голоморфных в произвольном открытом множестве, имеющем только односвязные компоненты связности.

Отметим, что похожие вопросы конструирования многократно универсальных голоморфных функций без контроля лакун их степенных рядов исследовались в ряде статей В. Луха (см. [2,3]). Отметим также, что подробную информацию о развитии теории универсальных функций и полную библиографию вплоть до 1999 г. можно найти в обзоре К. Гроссе-Эрдмана [4]. Более поздние исследования, естественно, связанные с нашей работой, представлены, например, в [5-11].

Чтобы сформулировать основные результаты статьи, введем некоторые обозначения и понятия. Для компактного множества K из конечной комплексной плоскости $\mathbb{C}$ обозначим через $A(K)$ Банахово пространство из всех непрерывных на K и голоморфных на его внутренности комплекснозначных функций с нормой $\|f\| = \sup\{|f(z)| : z \in K\}$. Обозначим через M семейство всех компактов $K \subset \mathbb{C}$ со связным дополнением $\mathbb{C} \setminus K$. Для множества $E \subset \mathbb{C}$ будем обозначать ∂E ее границу. Как обычно, пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ будут множества, соответственно, из всех натуральных и целых чисел; пусть также $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Для подпоследовательности $Q = \{q_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ из $\mathbb{N}_0$ положим $n(t)$ - количество ее членов из отрезка $[0, t]$ и определим верхнюю и минимальную плотности для Q следующим образом:

$$\overline{\Delta}(Q) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{n(t)}{t}, \quad \Delta_{\min}(Q) = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{n(t) - n(\tau)}{t(1-\tau)}.$$

Пусть функция f голоморфна в односвязной области $G \subset \mathbb{C}$. Последовательность операций $\{L^j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ определим следующим образом: для $z \in G$ и $j \in \mathbb{N}_0$ положим $L^0 f(z) = f(z)$, $L^1 f(z) = (zf(z))'$, $L^j f(z) = L^1(L^{j-1}f(z))$ при $j = 2, 3, \dots$; для $z \in G$ и $j = -1, -2, \dots$ положим

$$L^j f(z) = \begin{cases} z^{-1} \int_0^z L^{j+1} f(t) dt, & \text{если } 0 \in G \\ 0 \\ z^{-1} \int_{z_0}^z L^{j+1} f(t) dt, & \text{если } 0 \notin G, z_0 \in G, \end{cases}$$

где интеграл берется по любой спрямляемой дуге из G , соединяющей, соответственно, 0 или z_0 с z .

Пусть даны произвольные открытое множество $O \subset \mathbb{C}$, $0 \in O$, и подпоследовательность Q из N_0 . Обозначим через $H_Q(O)$ множество всех голоморфных на O функций φ , представимых в некоторой окрестности нуля лакунарным степенным рядом

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n z^n, \quad \varphi_n = 0 \quad \text{при } n \notin Q.$$

В частности, при $O = \mathbb{C}$ для кратности полагаем $H_Q(\mathbb{C}) = E_Q$.

Определение. Пусть $O \subset \mathbb{C}$ - произвольное открытое множество. Функция φ называется T -универсальной на O ("универсальной относительно трансляций"), если она голоморфна на O и имеет следующее свойство: для всех $K \in M$, для всех $f \in A(K)$ и для всех $\zeta \in \partial O$ существуют последовательности $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ такие, что $a_n z + b_n \in O$ для всех $z \in K$ и всех $n \in \mathbb{N}$, последовательность $\{a_n z + b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к ζ и последовательность $\{\varphi(a_n z + b_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к $f(z)$ равномерно на K .

Основными результатами статьи являются приведенные ниже теоремы 1-3. Первая из них относится к случаю целых функций. Далее рассматриваются функции, голоморфные, соответственно, на круге $D_r = \{z : |z| < r\}$ с $0 < r < \infty$ и на произвольном открытом множестве, имеющем только односвязные компоненты связности.

Теорема 1. Пусть $\{z_n\}_{n \in N_0}$ - неограниченная последовательность комплексных чисел и Q - подпоследовательность из N_0 с минимальной плотностью $\Delta_{\min}(Q) > 0$. Тогда существует функция φ такая, что при любом фиксированном $j \in \mathbb{Z}$ функция $L^j \varphi(z) \in E_Q$ и последовательность $\{L^j \varphi(z + z_n)\}_{n \in N_0}$ плотна в $A(K)$ для всех $K \in M$.

Теорема 2. Пусть Q - подпоследовательность из N_0 с минимальной плотностью $\Delta_{\min}(Q) > 0$. Тогда существует функция φ такая, что при любом фиксированном $j \in \mathbb{Z}$ функция $L^j \varphi(z) \in H_Q$

(D_r) и T -универсальна.

Теорема 3. Пусть $O \subset \mathbb{C}$ - открытое множество с односвязными компонентами, $0 \in O$, и пусть Q - подпоследовательность из $\mathbb{N}_0$ с верхней плотностью $\bar{\Delta}_{\min}(Q) = 1$. Тогда существует функция φ такая, что при любом фиксированном $j \in \mathbb{Z}$ функция $L^j \varphi(z) \in H_Q(O)$ и T -универсальна.

В заключение отметим, что доказательства теорем 1-3 основаны на новейших результатах теории комплексных приближений о возможности равномерного приближения многочленами с пропусками.

Институт математики НАН РА
Ереванский государственный университет

Литература

1. *Мартirosян В.А., Мартirosян А.З.* - Изв. НАН Армении. Математика. 2004. Т. 39. С. 5-11.
2. *Luh W.* - J.Approx. Theory. 1988. V. 53. P. 128-144.
3. *Luh W.* - J.Approx. Theory. 1997. V. 89. P. 135-155.
4. *Gross-Erdmann K.G.* - Bull. Amer. Math. Soc. 1999. V. 36. P. 345-381.
5. *Luh W., Martirosian V.A., Müller J.* - Indagationes Mathem. (N.S.). 1998. V. 9. P. 529-536.
6. *Luh W., Martirosian V.A., Müller J.* - Acta Sci. Math. (Szeged). 1998. V. 64. P. 67-79.
7. *Luh W., Martirosian V.A., Müller J.* - J.Approx. Theory. 2002. V. 114. P. 201-213.
8. *Gharibyan T., Luh W., Müller J.* - Analusis. 2003. V. 23. P. 199-214.
9. *Gharibyan T., Luh W.* - Annales Univ. Sci. Budapest. Sect. Comp. 2003. V. 22. P. 113-126.
10. *Gharibyan T., Luh W.* - Изв. НАН Армении. Математика. 2003. Т. 38. N 4. С. 51-64.
11. *Schillings B.* - Изв. НАН Армении. Математика. 2003. Т. 38. С. 85-94.

Վ. Հ. Մարտիրոսյան, Ա. Զ. Մարտիրոսյան

**Բացթողումներ ունեցող աստիճանային շարքերով ներկայացվող
բազմապատիկ T -ունիվերսալ ֆունկցիաներ**

Աշխատանքում բերվում են նոր արդյունքներ նախապես տրված բացթողումներ ունեցող աստիճանային շարքերով ներկայացվող և սկզբնական բացթողումները պահպանող պարզ գործողությունների հաջորդականության նկատմամբ բազմապատիկ T -ունիվերսալ ֆունկցիաների կառուցման մասին:

V. A. Martirosian, A. Z. Martirosyan

Multiple T -universal Functions Represented by Lacunar Power Series

New results on construction in various domains multiple T -universal functions represented by lacunar power series with prescribed lacunae are given in this work.