

УДК 511

С. Л. Амбарян

О порядке роста функции  $\pi(x)$  в пределах таблиц простых чисел

(Представлено академиком Ю.Г. Шукуряном 1/VII 2004)

Функция распределения простых чисел  $\pi(x)$  - число простых чисел в интервале от 1 до  $x$ , т. е.

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1,$$

где  $p$  - простое число.

Согласно теореме Чебышева существуют постоянные  $a > 0$  и  $b > a$  такие, что при всяком  $x \geq 2$  имеет место неравенство

$$a \cdot \frac{x}{\ln x} \leq \pi(x) \leq b \cdot \frac{x}{\ln x}.$$

Для постоянных  $a$  и  $b$  Чебышев получил значения  $a = 0.92129\dots$ ,  $b = 1.2$  [1].

В 1851 г. Чебышев доказал, что если отношение  $\pi(x)$  к  $\text{li } x$  - интегральному логарифму имеет предел, то он равен единице. Доказательство существования этого предела и равенство единице удалось получить Адамару и Валле-Пуссену независимо друг от друга в 1896 г. [1, 2].

Асимптотический закон распределения простых чисел утверждает следующее:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \pi(x) : \int_2^x \frac{dt}{\ln t} \right) = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \pi(x) : \frac{x}{\ln x} \right) = 1.$$

В 1808 г. Лежандр опубликовал найденную им эмпирически формулу

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x - 1.08366},$$

дающую приближенные значения функции  $\pi(x)$  при больших значениях  $x$ . Доказано, что более близкое к значениям  $\pi(x)$  дает выражение  $[x/(\ln x - 1)]$ , а еще более близкие к значению

$\pi(x)$  при больших значениях  $x$  дает функция  $\text{li } x$  - интегральный логарифм [2,3]

$$\text{li } x = 1.04 \dots + \int_2^x \frac{dt}{\ln t} > \frac{x}{\ln x}.$$

Россер получил интересную численную оценку несколько другого рода [2]

$$\frac{x}{\ln x + 2} < \pi(x) < \frac{x}{\ln x - 4} \text{ при } x \geq 55.$$

В дальнейшем нас будут интересовать оценки по форме Россера

$$\frac{x}{\ln x - k} < \pi(x) < \frac{x}{\ln x - k - 1}, \quad k = -2, -1, 0, +1, +2, +3.$$

Предположим, что имеют место следующие оценки:

$$\frac{x}{\ln x} < \pi(x) < \frac{x}{\ln x - 1} \text{ при } 5 \leq x \leq 10^3 \text{ и } \frac{x}{\ln x - 1} < \pi(x) < \frac{x}{\ln x - 2} \text{ при } x \geq 10^3.$$

Пусть  $a, b, c, d$  - натуральные числа. Обозначим через

$$\frac{A}{B} = \frac{x}{\ln x - a/b}, \quad \frac{X}{Y} = \frac{x}{\ln x - (a+c)/(b+d)} \text{ и } \frac{C}{D} = \frac{x}{\ln x - c/d}.$$

Отметим, что в вышеприведенных формулах числа  $a, b, c$  и  $d$  должны выбираться таким образом, чтобы:

- 1)  $a/b < c/d$  - соседние дроби Фарея,  $0 \leq a/b < 1$  и  $1 \geq c/d > 0$ , при  $5 \leq x \leq 10^3$ ;
- 2)  $d/c < b/a$  - соседние дроби Фарея,  $1 \geq b/a > 1/2$  и  $1/2 \leq d/c < 1$ , при  $x \geq 10^3$ .

**Определение 1.** Дроби  $[A/B] < [C/D]$  назовем соседними дробями Фарея - Россера, если  $\text{Det}([A/B], [C/D]) = bc - ad = 1$ .

**Определение 2.** Если дроби  $[A/B]$  и  $[C/D]$  соседние дроби Фарея - Россера, то дробь  $[X/Y]$  назовем медиантой этих дробей.

**Теорема 1.** Если дроби  $[A/B] < [C/D]$  соседние дроби Фарея - Россера, то имеет место неравенство  $[A/B] < [X/Y] < [C/D]$ .

**Доказательство.** Составим разности

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{X}{Y} - \frac{A}{B} = \frac{[(a+c)/(b+d) - a/b]x}{(\ln x - a/b) \cdot [\ln x - (a+c)/(b+d)]} = \\ &= \frac{x(bc - ad)}{[b(b+d)(\ln x - a/b)] \cdot [\ln x - (a+c)/(b+d)]} > 0 \end{aligned}$$

и

$$\Delta_2 = \frac{C}{D} - \frac{X}{Y} = \frac{[c/d - (a+c)/(b+d)]x}{(\ln x - c/d) \cdot [\ln x - (a+c)/(b+d)]} = \frac{x(bc - ad)}{[d(b+d)(\ln x - c/d)] \cdot [\ln x - (a+c)/(b+d)]} > 0.$$

**Следствие.** Для  $x \geq 8$  имеем

$$0 < \Delta_1 < \frac{x}{b^2(\ln x - 2)^2} \text{ и } 0 < \Delta_2 < \frac{x}{d^2(\ln x - 2)^2}.$$

**Теорема 2.** Медианта  $[X/Y]$  двух соседних дробей Фарея - Россера  $[A/B]$  и  $[C/D]$  является соседней дробью Фарея - Россера для  $[A/B]$  и  $[C/D]$ .

**Доказательство.** Докажем, что дроби  $[A/B] < [X/Y]$  соседние дроби Фарея - Россера. Действительно,

$$\text{Det} \begin{pmatrix} A & X \\ B & Y \end{pmatrix} = b(a+c) - a(b+d) = bc - ad = \text{Det} \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = 1.$$

Докажем, что дроби  $[X/Y] < [C/D]$  соседние дроби Фарея - Россера. Действительно,

$$\text{Det} \begin{pmatrix} X & C \\ Y & D \end{pmatrix} = (b+d)c - (a+c)d = bc - ad = \text{Det} \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = 1.$$

**Теорема 3.** Для любого  $x \geq 5$  существуют натуральные числа  $m$  и  $n$ , такие что  $|\pi(x) - [x/(\ln x - m/n)]| < 1$ .

**Доказательство.** Пусть  $[A/B] < \pi(x) < [C/D]$ , где  $[A/B]$  и  $[C/D]$  две соседние дроби Фарея - Россера. Если  $[A/B] < \pi(x) < [X/Y]$ , то согласно следствию получаем

$$\left| \pi(x) - \frac{x}{\ln x - a/b} \right| = \Delta_1 < \frac{x}{b^2(\ln x - 2)^2}, \text{ т.е. } \left| \pi(x) - \frac{x}{\ln x - a/b} \right| < 1,$$

если  $b > (\sqrt{x})/(\ln x - 2)$ . Аналогично, если  $[X/Y] < \pi(x) < [C/D]$ , то согласно следствию получаем

$$\left| \pi(x) - \frac{x}{\ln x - c/d} \right| = \Delta_2 < \frac{x}{d^2(\ln x - 2)^2}, \text{ т.е. } \left| \pi(x) - \frac{x}{\ln x - c/d} \right| < 1,$$

если  $d > ((\sqrt{x})/(\ln x - 2))$ .

В таблице (графы 4, 5, 6) приведены значения  $n$ ,  $m$  и  $k = n/m$  для некоторых  $x$ ,  $10 \leq x \leq 10^{14}$ .

Рассмотрим функцию распределения простых чисел  $\pi(x)$  при натуральном аргументе  $x$  параметром  $b$  по следующей формуле:

$$\pi(n) = \frac{n}{\ln n - b}, \quad n = 2, 3, \dots$$

По методу наименьших квадратов [4] определим среднее значение параметра  $b$  в пределах таблиц значений функции распределения простых чисел  $\pi(x)$  [1-3,5-7] на отрезке  $[m, N]$  натурального ряда.

| N  | x                 | $\pi(x)$   | n     | m     | n/m      | b        | a        | b        |
|----|-------------------|------------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|
| 1  | 2                 | 3          | 4     | 5     | 6        | 7        | 8        | 9        |
| 1  | $5 \cdot 10^0$    | 3          | 1     | 3     | 0.333333 | -        | -        | -        |
| 2  | 10                | 4          | 1     | 4     | 0.250000 | -0.08081 | 0.828231 | 0.268389 |
| 3  | $5 \cdot 10$      | 15         | 1     | 2     | 0.500000 | 0.496932 | 1.244464 | -0.24219 |
| 4  | $10^2$            | 25         | 1     | 2     | 0.500000 | 0.638356 | 1.185799 | -0.02577 |
| 5  | $5 \cdot 10^2$    | 95         | 9     | 10    | 0.900000 | 0.877088 | 1.121260 | 0.276060 |
| 6  | $10^3$            | 168        | 12    | 13    | 0.923077 | 0.937173 | 1.084562 | 0.464155 |
| 7  | $5 \cdot 10^3$    | 669        | 20    | 19    | 1.052632 | 1.029900 | 1.039054 | 0.751868 |
| 8  | $10^4$            | 1229       | 14    | 13    | 1.076923 | 1.051281 | 1.033221 | 0.792356 |
| 9  | $5 \cdot 10^4$    | 5133       | 27    | 25    | 1.080000 | 1.075938 | 1.008763 | 0.993705 |
| 10 | $10^5$            | 9592       | 25    | 23    | 1.086957 | 1.081672 | 1.007870 | 1.002393 |
| 11 | $5 \cdot 10^5$    | 41538      | 51    | 47    | 1.085106 | 1.082710 | 0.998597 | 1.099105 |
| 12 | $10^6$            | 78498      | 113   | 105   | 1.076190 | 1.082193 | 0.998832 | 1.096657 |
| 13 | $5 \cdot 10^6$    | 348513     | 124   | 115   | 1.078261 | 1.076791 | 0.996343 | 1.127984 |
| 14 | $10^7$            | 664579     | 166   | 155   | 1.070968 | 1.074384 | 0.996408 | 1.127172 |
| 15 | $5 \cdot 10^7$    | 3001134    | 143   | 134   | 1.067164 | 1.068135 | 0.996248 | 1.129334 |
| 16 | $10^8$            | 5761455    | 183   | 172   | 1.063953 | 1.065467 | 0.996120 | 1.131461 |
| 17 | $5 \cdot 10^8$    | 26355867   | 664   | 627   | 1.959011 | 1.059945 | 0.996756 | 1.120358 |
| 18 | $10^9$            | 50847534   | 1586  | 1501  | 1.056629 | 1.057655 | 0.996755 | 1.120345 |
| 19 | $5 \cdot 10^9$    | 234954223  | 2814  | 2675  | 1.051963 | -        | -        | -        |
| 20 | $10^{10}$         | 455052511  | 4171  | 3971  | 1.050365 | -        | -        | -        |
| 21 | $5 \cdot 10^{10}$ | 2119654578 | 16438 | 15707 | 1.046540 | -        | -        | -        |
| 22 | $10^{11}$         | 4118054813 | 27653 | 26459 | 1.045126 | -        | -        | -        |

|    |                   |               |        |        |          |   |   |   |
|----|-------------------|---------------|--------|--------|----------|---|---|---|
| 23 | $5 \cdot 10^{11}$ | 19308136142   | 20244  | 19427  | 1.042055 | - | - | - |
| 24 | $10^{12}$         | 37607912018   | 35297  | 33911  | 1.040872 | - | - | - |
| 25 | $5 \cdot 10^{12}$ | 177291661649  | 55623  | 53569  | 1.038343 | - | - | - |
| 26 | $10^{13}$         | 346065536839  | 217522 | 209691 | 1.037345 | - | - | - |
| 27 | $5 \cdot 10^{13}$ | 1638923764567 | 74984  | 72433  | 1.035219 | - | - | - |
| 28 | $10^{14}$         | 3204941750802 | 151262 | 146235 | 1.034376 | - | - | - |

Вычислим следующую разность  $\delta_n = \pi(n)(\ln n - b) - n$ .

Составим сумму  $F(b) = \sum_{n=m}^N \delta_n^2 = \sum_{n=m}^N (\pi(n)(\ln n - b) - n)^2$ , вычислим производную функции  $F(b)$  по

$b$  и приравняем ее к нулю

$$\frac{dF(b)}{db} = -2 \sum_{n=m}^N (\pi(n)(\ln n - b) - n) \cdot \pi(n) = 0.$$

Параметр  $b$  определяется по формуле

$$b = \left( \sum_{n=m}^N \pi^2(n) \left( \ln n - \frac{n}{\pi(n)} \right) \right) : \left( \sum_{n=m}^N \pi^2(n) \right).$$

В таблице (графа 7) приведены значения параметра  $b$  для различных отрезков  $[2, x]$  натурального ряда.

Теперь рассмотрим функцию распределения простых чисел  $\pi(x)$  при натуральном аргументе с параметрами  $a$  и  $b$  по следующей формуле:

$$\pi(n) = \frac{an}{\ln n - b}, \quad n = 2, 3, \dots$$

По методу наименьших квадратов определим среднее значение параметров  $a$  и  $b$  в пределах таблиц значений функции распределения простых чисел  $\pi(x)$  [1-3,5-7] на отрезке  $[m, N]$

натурального ряда.

Вычислим следующую разность  $\delta_n = \pi(n)(\ln n - b) - an$ .

Составим сумму  $F(a,b) = \sum_{n=m}^N \delta_n^2 = \sum_{n=m}^N (\pi(n)(\ln n - b) - an)^2$ , вычислим производные функции F

(a,b) по a и b, приравняем их к нулю:

$$\frac{\partial F(a,b)}{\partial a} = -2 \sum_{n=m}^N (\pi(n)(\ln n - b) - an) \cdot n = 0,$$

$$\frac{\partial F(a,b)}{\partial b} = -2 \sum_{n=m}^N (\pi(n)(\ln n - b) - an) \cdot \pi(n) = 0.$$

Параметры a и b удовлетворяют следующей системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot a + a_{12} \cdot b = b_1, \\ a_{21} \cdot a + a_{22} \cdot b = b_2, \end{cases}$$

где

$$a_{11} = \left( \sum_{n=m}^N n^2 \right), \quad a_{12} = a_{21} = \left( \sum_{n=m}^N n\pi(n) \right), \quad a_{22} = \left( \sum_{n=m}^N \pi^2(n) \right),$$

$$b_1 = \left( \sum_{n=m}^N n\pi(n)\ln n \right), \quad b_2 = \left( \sum_{n=m}^N \pi^2(n)\ln n \right).$$

Решение системы линейных уравнений определяется по формулам [8]

$$a = (b_1 a_{22} - a_{12} b_2) / (a_{11} a_{22} - a_{12}^2),$$

$$b = (a_{11} b_2 - b_1 a_{21}) / (a_{11} a_{22} - a_{12}^2).$$

В таблице (графы 8, 9) приведены значения параметров a и b для различных отрезков [2,x] натурального ряда.

Дальнейшие исследования в области вычислительной теории простых чисел связаны с

арифметическими действиями с большими целыми числами - арифметикой многократной точности (multi-precise routines) [9-11].

Ереванский научно-исследовательский  
институт математических машин

### Литература

1. *Арнольд И. В.* Теория чисел. М. Учпедгиз. 1939. 288 с.
2. *Трост Э.* Простые числа. М. Гос. изд. физ.-мат. лит. 1959. 136 с.
3. *Бухштаб А. А.* Теория чисел. М. Просвещение. 1966. 384 с.
4. *Кассандрова О. Н., Лебедев В. В.* Обработка результатов наблюдений. М. Наука. 1971. 104 с.
5. *Виноградов И. М.* Основы теории чисел. М.-Л. Гос. изд. тех.-теоретической лит. 1952. 180 с.
6. *Уильямс Х.* - Кибернетический сб. Новая серия. Вып. 23. М. Мир. 1986.
7. Wolfram Research Mathematica45.
8. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. М. Наука. 1971. 432 с.
9. *Кнут Д.* Искусство программирования для ЭВМ. Т. 2. Получисленные алгоритмы. М. Мир. 1977. 724 с.
10. *Амбарян С. Л.* - ДНАН Армении. 2001. Т. 101. N 3. С. 203-210.
11. *Амбарян С. Л.* - В сб.: ППП в среде Visual C++ 6.0. ЕрНИИММ. Ереван. 1998.

Ս. Լ. Համբարյան

**Պարզ թվերի արժեքների աղյուսակների սահմաններում  $\pi(x)$  ֆունկցիայի աճման  
կարգի մասին**

Պարզ թվերի բաշխումը բնական թվերի շարքում բնորոշվում է նրանց բաշխման  
ասիմպտոտիկ օրենքով  $\pi(x) \approx x/\ln x$ :

Աշխատանքում հետազոտվել է  $\pi(x)$  ֆունկցիայի ներկայացումը  $\pi(x) \approx x/(\ln x - m/n)$   
տեսքով: Ապացուցված է հետևյալ թեորեմը.

**Թեորեմ:** *Ցանկացած  $x \geq 5$ -ի համար գոյություն ունեն  $m$  և  $n$  բնական թվեր այնպես, որ*

$$\left| \pi(x) - \frac{x}{\ln x - m/n} \right| < 1.$$

Բնական թվերի շարքի տարբեր հատվածների համար  $m$  և  $n$  բնական թվերի արժեքները  
բերված են աղյուսակի համապատասխան սյունակներում:

Ժամանակակից անհատական համակարգիչների միջոցով պարզ թվերի սերումը և դրանց  
օգնությամբ կառուցվող պարզ թվերի աղյուսակների ուսումնասիրումը  $\pi(x)$  ֆունկցիայի  
մեծության հետազոտման համար հետաքրքիր ասպարեզ է:

Կիրառելով փոքրագույն քառակուսիների մեթոդը՝ աշխատանքում հաշվարկվել են  $a$  և  $b$   
անորոշ պարամետրերի արժեքները  $\pi(x)$  ֆունկցիայի՝  $\pi(x) \approx x/(\ln x - b)$  և  $\pi(x) \approx$   
 $ax/(\ln x - b)$  ներկայացումներում:

Բնական թվերի շարքի տարբեր հատվածների համար  $a$  և  $b$  պարամետրերի արժեքները  
բերված են աղյուսակի համապատասխան սյունակներում:

S. L. Hambaryan

**Concerning the Increase of  $\pi(x)$  Function  
in the Range of Tables of Prime Number Values**

Distribution of prime numbers in the series of natural numbers is defined with their  
asymptotic law  $\pi(x) \approx x/\ln x$ .

Analysis of  $\pi(x)$  function as  $\pi(x) \approx x/(\ln x - m/n)$  is done in the paper. The following  
theorem is proved.

**Theorem.** *There are  $m$  and  $n$  natural numbers for any  $x \geq 5$  so, that*

$$\left| \pi(x) - \frac{x}{\ln x - m/n} \right| < 1.$$

The values of  $m$  and  $n$  natural numbers for different intervals of natural number series are  
given in the appropriate columns of the table.

The analysis of tables of prime numbers made on base of prime number generation with help  
of modern computers for investigation of  $\pi(x)$  function is interesting area.

Using the least square method, the values of  $a$  and  $b$  indefinite parameters for  $\pi(x) \approx$   
 $x/(\ln x - b)$  and  $\pi(x) \approx ax/(\ln x - b)$  functions are calculated in the paper.

The values of  $a$  and  $b$  parameters for different intervals of natural number series are given in  
the appropriate columns of the table.