

УДК 517

С. Л. Гогян

Подсистема Хаара как квазигриди базис

(Представлено чл.-кор. НАН РА Г.Г. Геворкяном 25/VI 2004)

Пусть $\Psi = (\psi_n)_{n=1}^{\infty}$ нормированный базис в Банаховом пространстве X . Для любого элемента $x \in X$ будем иметь разложение

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x, \Psi) \psi_n.$$

Обозначим $\text{spec}(x) = \{i \in \mathbb{N}; c_i(x, \Psi) \neq 0\}$. Для элемента $x \in X$, перестановку натуральных чисел ρ , $\rho(j) = k_j$, $j = 1, 2, \dots$ назовем понижающим и будем писать $\rho \in D(x)$, если

$$|c_{k_1}(x, \Psi)| \geq |c_{k_2}(x, \Psi)| \geq \dots$$

В случае строгих неравенств, $D(x)$ будет содержать только одну перестановку. Определим m -ый гриди аппроксимант элемента x по системе Ψ и перестановке $\rho \in D(x)$ по формуле

$$G_m(x) = G_m(x, \Psi, \rho) = \sum_{j=1}^m c_{k_j}(x, \Psi) \psi_{k_j}.$$

Положим $\Lambda_m(x, \Psi) = |c_{k_m}(x, \Psi)|$. Заметим, что $\Lambda_m(x, \Psi)$ определяется однозначно и не зависит от понижающей перестановки $\rho \in D(x)$.

Определение. Базис Ψ называется квазигриди базисом, если для каждого элемента $x \in X$ и для каждой перестановки $\rho \in D(x)$ имеет место

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|x - G_m(x, \Psi, \rho)\|_X = 0.$$

Гриди базисы разных типов описаны В. Н. Темляковым в работе [1].

Теорема [2]. Для того, чтобы базис Ψ являлся квазигриди базисом, необходимо и достаточно, чтобы для каждого элемента $x \in X$ и перестановки $\rho \in D(x)$ имело место

$$\|G_m(x, \Psi, \rho)\|_X \leq C\|x\|_X \quad (1)$$

для некоторой постоянной C , не зависящей от x и от m .

Из этой теоремы ясно, что если (1) имеет место для одной перестановки $\rho \in D(x)$, то будет справедливым и для всех перестановок $\rho \in D(x)$.

Напомним определение ортогональной системы Хаара

$$\chi_k^{(m)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } x \in [0, 1) \\ 2^{k-1} \frac{m-1}{2^{k-1}} < x < \frac{2m-1}{2^k} & k = 1, 2, 3, \dots \\ -2^{k-1} \frac{2m-1}{2^k} < x < \frac{m}{2^{k-1}} & 1 \leq m \leq 2^{k-1} \\ 0 & \text{для остальных } x. \end{cases}$$

Здесь система Хаара нормирована по L^1 норме. Хорошо известно, что система Хаара является безусловным базисом в $L^p(0,1)$ при $p > 1$ и базисом в $L^1(0,1)$ (см. например [3]). В работе [4] показано, что система Хаара не является квазигриди базисом в $L^1(0,1)$. Там же построена возрастающая последовательность натуральных чисел $(n_k)_{k=0}^\infty$ так, что подсистема Хаара

$\left(\chi_{n_k}^j \right)_{j=1}^{2^{n_k-1}} \Big|_{k=0}^\infty$ в $L^1(0,1)$ является квазигриди базисом на своей линейной оболочке. Хотя конкретный вид последовательности $(n_k)_{k=0}^\infty$ в [4] не фигурирует, но можно показать, что она растет не медленнее, чем геометрическая прогрессия. В частности для достаточно больших k имеет место $[(n_{k+1})/(n_k)] > 2$.

В данной работе под выражением $\|f\|_\Delta$ будем подразумевать L^1 норму функции f на интервале Δ . Напомним, что система Хаара обладает свойством монотонности, т. е. для любых чисел $a_k \in \mathbb{R}$ и $m \in \mathbb{N}$ и для любой возрастающей последовательности n_k имеет место

$$\left\| \sum_{k=1}^m a_k \chi_{n_k} \right\|_{L^1(0,1)} \leq \left\| \sum_{k=1}^{m+1} a_k \chi_{n_k} \right\|_{L^1(0,1)}.$$

С применением этого свойства легко доказывается

Лемма 1. Для любой $f \in L^1(0,1)$ и каждого $n \in \mathbb{N}$ справедливо

$$\|f\|_{\text{supp}(\chi_n)} \geq |c_n(f)|.$$

Для любого $n = 0, 1, 2, \dots$ определим

$$Q^{(2n)} = \left\{ f : f = q_0 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{2^{2i-1}} q_i^j \chi_{2i}^j, \text{ где } |q_0| \leq 1 \text{ и } |q_i^j| \leq 1; i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, 2^{2i-1} \right\}$$

и

$$Q^{(2n+1)} = \left\{ f : f = \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^{2^{2i}} q_i^j \chi_{2i+1}^j, \text{ где } |q_i^j| \leq 1; i = 0, 1, \dots, n; j = 1, 2, \dots, 2^{2i} \right\}$$

Обозначим $\dot{Q} = \bigcup_{i=0}^{\infty} Q^{(2i+1)}$ и $\ddot{Q} = \bigcup_{i=0}^{\infty} Q^{(2i)}$. Определим также

$$P^{(2n)} = \left\{ f : f = p_0 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{2^{2i-1}} p_i^j \chi_{2i}^j, \text{ где } p_0 = 0 \text{ или } |p_0| \geq 1 \text{ и } |p_i^j| \geq 1 \right. \\ \left. \text{или } p_i^j = 0; i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, 2^{2i-1} \right\}$$

и

$$P^{(2n+1)} = \left\{ f : f = \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^{2^{2i}} p_i^j \chi_{2i+1}^j, \text{ где } |p_i^j| \geq 1 \text{ или } |p_i^j| = 0; i = 0, 1, \dots, n; j = 1, 2, \dots, 2^{2i} \right\}.$$

Если Δ является носителем функции из системы Хаара с нижним индексом k , то скажем, что Δ является интервалом Хаара размерности k .

Лемма 2. Пусть Δ интервал Хаара размерности $k \geq 1$. Тогда для любой функции $f \in Q^{(k-1)}$ справедливо

$$\|f\|_{\Delta} \leq 1.$$

Через $\tilde{P}^{(n)}$ обозначим множество всех функций $p \in P^{(n)}$, которые удовлетворяют условию: на любом интервале Хаара (a, b) размерности $n - 2i - 1 \geq 1$ ($i = 0, 1, \dots$) справедливо

$$\forall x \in \left(a, \frac{a+b}{2} \right) \Rightarrow p(x) = p \left(x + \frac{b-a}{2} \right).$$

Аналогично через $\tilde{Q}^{(n)}$ обозначим множество всех функций $q \in Q^{(n)}$, которые удовлетворяют

условию: на любом интервале Хаара (a, b) размерности $n - 2i - 1 \geq 1$ ($i = 0, 1, \dots$) справедливо

$$\forall x \in \left(a, \frac{a+b}{2} \right) \Rightarrow q(x) = q \left(x + \frac{b-a}{2} \right).$$

Лемма 3. Пусть для некоторого $C > 0$ и натурального $n \geq 2$ существуют функции $f \in P^{(n)}$ ($f \notin P^{(n-2)}$) и $q \in \dot{Q}$, если n нечетное ($q \in \ddot{Q}$ если n четное), так, что

$$\|f\| > C\|f+g\|$$

и

$$\text{spec}(f) \cap \text{spec}(g) = \emptyset.$$

Тогда существуют число $0 \leq i \leq n$ и функции p, q так, что

1. $n \equiv i \pmod{2}$,
2. $p \in \tilde{P}^{(i)}$,
3. $p \notin \tilde{P}^{(i-2)}$, $q \in \tilde{Q}^{(i-2)}$ если $i \geq 2$ и $q = 0$ если $i = 0, 1$,
4. $\|p\| > C\|p+q\|$,
5. $\text{spec}(p) \cap \text{spec}(q) = \emptyset$.

Теорема 1. Пусть функции p и q таковы, что для некоторой $n \geq 2$

1. $p \in \tilde{P}^{(n)}$, $p \notin \tilde{P}^{(n-2)}$
2. $q \in \tilde{Q}^{(n-2)}$,
3. $\text{spec}(p) \cap \text{spec}(q) = \emptyset$.

Тогда

$$\|p\| \leq 3\|p+q\|.$$

Из этой теоремы и леммы 3 выводится

Теорема 2. Пусть для некоторого неотрицательного n функция $p \in P^{(n)}$ и $p \notin P^{(n-2)}$ (если $n \geq 2$). Тогда для любой функции $q \in \dot{Q}$, если n нечетное ($q \in \ddot{Q}$, если n четное), для которой $\text{spec}(p) \cap \text{spec}(q) = \emptyset$, справедливо

$$\|p\| \leq 3\|p+q\|.$$

Теорема 3. Подсистема $\left((\chi_{2k}^j)_{j=1}^{2^{2k-1}} \right)_{k=0}^{\infty}$ системы Хаара в $L^1(0,1)$ является квазигриды базисом на своей линейной оболочке.

Доказательство. Возьмем $\forall f \in \text{span} \left((\chi_{2k}^j)_{j=1}^{2^{2k-1}} \right)_{k=0}^{\infty}$ и $m \in \mathbb{N}$.

- 1) Если $\Lambda_m(f, \chi) = 0$, то $f - G_m(f) = 0$ и следовательно $\|G_m(f)\| = \|f\| \leq 3\|f\|$.
- 2) Если $\Lambda_m(f, \chi) \neq 0$, то функция $p(f) = [(G_m(f))/(\Lambda_m(f, \chi))] \in P^{(2k)}$ при некотором натуральном k , а функция $q(f) = [(f - G_m(f))/(\Lambda_m(f, \chi))] \in \tilde{Q}$. Согласно теореме 2

$$\frac{\|G_m(f)\|}{\Lambda_m(f, \chi)} = \|p(f)\| \leq 3\|p(f) + q(f)\| = \frac{\|f\|}{\Lambda_m(f, \chi)},$$

а это означает, что

$$\|G_m(f)\| \leq 3\|f\|.$$

Теорема доказана.

Точно так же доказывается

Теорема 4. Подсистема $\left(\chi_{2k+1}^j \right)_{j=1}^{2^{2k}} \right)_{k=0}^{\infty}$ системы Хаара в $L^1(0,1)$ является квазигриди базисом на своей линейной оболочке.

Ереванский государственный университет

Литература

1. *Temlyakov V. N.* - Found. Comput. Math. 2003. V. 3. P. 33-107.
2. *Wojtashchuk P.* - J. of Approximation Theory. 2000. V. 107. P. 293-314.
3. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* - Ортогональные ряды. М. АФЦ. 1999.
4. *Dilworth S. J., Kutzarova D., Wojtashchuk P.* - J. of Approximation Theory. 2002. V. 114(2). P. 214-241.

Ս. Լ. Գոգյան

Հաարի ենթահամակարգը որպես քվադիգրիդի բազիս

Աշխատանքում ապացուցված է, որ Հաարի համակարգի զույգ և կենտ խմբերի համախմբերն առանձին-առանձին քվադիգրիդի բազիս են L^1 -ում:

S. L. Gogyan

Haar Subsystem as a Quasi-Greedy Basis

It is proved in the paper, that the union of Haar system even and odd groups separately are quasi-greedy bases in L^1 .