

УДК 539.1

Член-корреспондент НАН РА А. Г. Багдоев, А. Н. Мартirosян,
Г. А. Мартirosян

Распространение электромагнитных волн в двухслойной среде от вибратора при наличии идеально проводящего полубесконечного экрана

(Представлено 27/I 2004)

Рассматривается линейная электродинамическая задача о расчете действия импульсного вибратора, находящегося в верхней полуплоскости (х,у), при наличии на отрицательной части оси х идеально проводящего экрана.

Соотношения электродинамики между компонентами электрического и магнитного полей и компонентой Π вектора Герца имеют вид [1]

$$\begin{aligned} H_x = 0, \quad H_y = 0, \quad E_z = 0, \quad H_z = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial t}, \\ E_x = -\frac{c}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial y}, \quad E_y = -\frac{1}{c} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} - \frac{c}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y}, \end{aligned} \quad (1)$$

где c - скорость света в пустоте, ε - диэлектрическая проницаемость. Уравнения Максвелла для верхней и нижней полуплоскостей имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial y^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial t^2} = -\Pi_0 \delta(x) \delta(y - y_0) \delta(t), \\ \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial y^2} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $c_{1,2}$ - скорость света в полуплоскостях.

Граничные условия на линии контакта полуплоскостей имеют вид: $y = 0$,

$$\Pi_1 = \Pi_2, \quad \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial \Pi_1}{\partial y} = \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial \Pi_2}{\partial y}, \quad 0 < x < \infty;$$

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Pi_2}{\partial y} = 0, \quad -\infty < x < 0;$$

$$\Pi_1, \Pi_2 = O(r_1^{1/2}), \quad r_1 \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0. \quad (3)$$

В верхней полуплоскости можно записать

$$\Pi_1 = \Pi_1^0 + \Pi_1', \quad \Pi_1^0 = \begin{cases} \frac{I_0}{2\pi \sqrt{t^2 - [(r^2)/(c_1^2)]}}, & t > \frac{r}{a} \\ 0, & t < \frac{r}{a}, \end{cases} \quad (4)$$

где $[c/(4\pi)]I_0$ - сила тока в вибраторе, l - длина диполя, Π_1^0 есть решение задачи об импульсе в бесконечной плоскости, $r^2 = x^2 + (y - y_0)^2$.

Решение находится методом интегральных преобразований и сводится к системе Винера - Хопфа, которая решается обычным способом [2]. Вводя преобразования по Лапласу $\bar{\Pi}$ от Π по t , можно полагать

$$\bar{\Pi}_1^0 = \frac{iI_0}{2\pi} \operatorname{sgn} \omega \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\{\alpha x - \beta_1(\alpha)(y - y_0)\}}}{2\beta_1(\alpha)} d\alpha,$$

$$\beta_1(\alpha) = \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \alpha^2}, \quad \beta_2(\alpha) = -\sqrt{\frac{1}{c_2^2} - \alpha^2} \quad (5)$$

$$\bar{\Pi}_1' = \operatorname{sgn} \omega \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\Pi}_1(\alpha) e^{i\omega(\alpha x + \beta_1 y)} d\alpha,$$

$$\bar{\Pi}_2 = \operatorname{sgn} \omega \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\Pi}_2(\alpha) e^{i\omega(\alpha x + \beta_2 y)} d\alpha,$$

где $s = -i\omega$ есть параметр преобразования Лапласа, две черточки соответствуют преобразованиям Лапласа по t и Фурье по x . Из граничных условий (3) и (5) следуют соотношения

$$\overline{\overline{\Pi_1^0}} + \overline{\overline{\Pi_1}} - \overline{\overline{\Pi_2}} = E^+(\alpha), \quad \frac{-i\omega\beta_1}{\varepsilon_1} \overline{\overline{\Pi_1^0}} + \frac{1}{\varepsilon_1} i\omega\beta_1 \overline{\overline{\Pi_1}} - \frac{1}{\varepsilon_2} i\omega\beta_2 \overline{\overline{\Pi_2}} = F^+(\alpha), \quad (6)$$

$$-i\omega\beta_1 \overline{\overline{\Pi_1^0}} + i\omega\beta_1 \overline{\overline{\Pi_1}} = G^-(\alpha),$$

$$i\omega\beta_2 \overline{\overline{\Pi_2}} = H^-(\alpha), \quad \overline{\overline{\Pi_1^0}} = i\Pi_0(4\pi\beta_1)^{-1} e^{i\beta_1(\alpha)\omega y_0}.$$

Здесь индексы $\pm$ соответствуют функциям, аналитическим в верхней и нижней полуплоскости α .

Исключая $\overline{\overline{\Pi_1}}$ и $\overline{\overline{\Pi_2}}$ из (6), получим систему Винера - Хопфа

$$\begin{aligned} 2\overline{\overline{\Pi_1^0}} + \frac{1}{i\omega\beta_1} G^-(\alpha) - \frac{1}{i\omega\beta_2} H^-(\alpha) &= E^+(\alpha), \\ \frac{1}{\varepsilon_1} G^-(\alpha) - \frac{1}{\varepsilon_2} H^-(\alpha) &= F^+(\alpha). \end{aligned} \quad (7)$$

Из второго уравнения (7), так как $F^+(\alpha)$ аналитично в верхней полуплоскости, выражение $[1/(\varepsilon_1)]G^-(\alpha) - [1/(\varepsilon_2)]H^-(\alpha)$ - в нижней полуплоскости и $F^+(\alpha)$ согласно граничному условию (3) в бесконечности равно нулю, по теореме Лиувилля имеем $F^+(\alpha) \equiv 0$, $[1/(\varepsilon_1)]G^-(\alpha) - [1/(\varepsilon_2)]H^-(\alpha) \equiv 0$. Тогда $H^-(\alpha) = [(\varepsilon_2)/(\varepsilon_1)]G^-(\alpha)$. Подставляя полученное выражение для $H^-(\alpha)$ в первое уравнение (7), получим

$$\begin{aligned} \frac{C_0}{i\omega\beta_1} f(\alpha) G^-(\alpha) &= E^+(\alpha) - 2\overline{\overline{\Pi_1^0}}, \\ f(\alpha) &= \frac{1}{C_0} \begin{pmatrix} \beta_1 & \varepsilon_2 \\ 1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \end{pmatrix}, \quad C_0 = 1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Так как $f(\alpha) \rightarrow 1$ при $\alpha \rightarrow \infty$, то согласно теореме С [2] можно написать

$$f(\alpha) = f^+(\alpha)f^-(\alpha), \quad (9)$$

где $f^+(\alpha)$ и $f^-(\alpha)$ аналитично соответственно в верхней и нижней полуплоскостях плоскости α

$$\ln f^-(\alpha) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \ln f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - \alpha}. \quad (10)$$

Здесь путь интегрирования совпадает с вещественной осью и обходит точки ветвления $\zeta = -[1/(c_1)]$, $-[1/(c_2)]$ сверху, точки ветвления $\zeta = [1/(c_1)]$, $[1/(c_2)]$ снизу и точку $\zeta = \alpha$ сверху. В формуле (9) путь интегрирования деформируем так, что он проходит по обоим берегам разреза вдоль вещественной оси от $[1/(c_1)]$ до $+\infty$. После выбора ветвей функций β_1 , β_2 легко вычислить $\ln f^-(\alpha)$ в виде

$$\ln f^-(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{c_1}}^{\frac{1}{c_2}} \arctg \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{\sqrt{\zeta^2 - \frac{1}{c_1^2}}}{\sqrt{\frac{1}{c_2^2} - \zeta^2}} \frac{d\zeta}{\zeta - \alpha} \equiv \varphi^-(\alpha), \quad (11)$$

$$f^\pm(\alpha) = \exp(\varphi^\pm(\alpha)), \quad f^+(\alpha) = f^-(-\alpha).$$

Из уравнений (8), (9), (11) получим

$$\frac{C_0}{i\omega} \frac{f^-(\alpha)}{\beta_1^-(\alpha)} G^-(\alpha) = \frac{\beta_1^+(\alpha)}{f^+(\alpha)} E^+(\alpha) - \frac{2\overline{\Pi_1^0} \beta_1^+(\alpha)}{f^+(\alpha)}, \quad (12)$$

$$\beta_1(\alpha) = \beta_1^+(\alpha)\beta_1^-(\alpha), \quad \beta_1^\pm(\alpha) = \sqrt{\frac{1}{c_1} \pm \alpha}.$$

Обозначим $g(\alpha) = -[(iI_0)/(2\pi\beta_1^-(\alpha)f^+(\alpha))]e^{i\omega\beta_1(\alpha)y_0}$.

Так как $g(\alpha) \sim [\text{const} / \sqrt{\alpha}]$ при $\alpha \rightarrow \infty$, то можно функцию $g(\alpha)$ представить в виде [2]

$$g(\alpha) = g^+(\alpha) + g^-(\alpha), \quad (13)$$

где $g^-(\alpha) = -[(iI_0)/(4\pi^2)] \int_{-\infty}^{\infty} [(e^{i\omega\beta_1(\zeta)y_0} d\zeta) / \sqrt{\zeta - [1/(c_1)]}] f^+(\zeta)(\zeta - \alpha)$, $g^+(\alpha) = g(\alpha) - g^-(\alpha)$.

Из формулы (12), (13) получим

$$\frac{C_0}{i\omega} \frac{f^-(\alpha)}{\beta_1^-(\alpha)} G^-(\alpha) - g^-(\alpha) = \frac{\beta_1^+(\alpha) E^+(\alpha)}{f^+(\alpha)} + g^+(\alpha) \equiv I(\alpha). \quad (14)$$

Функция $I(\alpha)$ определена лишь на вещественной оси. Однако функция $I(\alpha)$ в формуле (14), написанной с индексом $(-)$, определена и аналитична в нижней полуплоскости, а функция с индексом $(+)$ аналитична в верхней полуплоскости α . Таким образом аналитическим продолжением функцию $I(\alpha)$ можно определить на всей плоскости α .

Из граничных условий (3) видно, что $I(\alpha) \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow \infty$. Тогда по теореме Лиувилля функция $I(\alpha) \equiv 0$, т.е.

$$\begin{aligned} \frac{C_0}{i\omega} \frac{f^-(\alpha)}{\beta_1^-(\alpha)} G^-(\alpha) - g^-(\alpha) &= 0, \\ \frac{\beta_1^+(\alpha) E^+(\alpha)}{f^+(\alpha)} + g^+(\alpha) &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Переходя к обратным преобразованиям Лапласа и Фурье, получим [3]

$$\frac{\partial \Pi'_1}{\partial y} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} e^{s(t-\alpha x - \beta_1 y)} G^-(\alpha) d\alpha. \quad (16)$$

Вычисляя интегралы в формуле (16) по s и затем по α , можно получить решения в форме Смирнова - Соболева

$$\frac{\partial \Pi'_1}{\partial y} = \frac{1}{C_0} \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial t} \frac{i\Pi_0}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta_1^-(\alpha_0) d\zeta}{\sqrt{\zeta - \frac{1}{c_1}} f^+(\zeta) (x + \beta_1'(\alpha_0)y) f^-(\alpha_0) (\zeta - \alpha_0)} \quad (17)$$

$$a_0 = \left(\bar{t}x + iy \sqrt{\bar{t}^2 - \frac{x^2 + y^2}{c_1^2}} \right) (x^2 + y^2)^{-1}, \quad \bar{t} = t - \beta_1(\zeta)y_0.$$

Определим поведения решений при $y = 0$, $x \sim 0$, $\alpha \rightarrow \infty$, $g^-(\alpha) \sim [1/(\alpha)]$, $\beta_1^-(\alpha) \sim i\sqrt{\alpha}$, $d = [t/x]$

(18)

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial y} = -\operatorname{Re} \frac{\Pi_0}{2\pi^2 C_0} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{x\sqrt{x}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{t} \partial \zeta}{\sqrt{\zeta - \frac{1}{c_1} f^+(\zeta) \left(\zeta - \frac{\bar{t}}{x}\right)}}.$$

или

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial y} = \operatorname{Re} \frac{\Pi_0}{2\pi^2 C_0} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \zeta}{\sqrt{t} \sqrt{\zeta - \frac{1}{c_1} f^+(\zeta)}}$$

Институт механики НАН РА
Горисский филиал ГИУА

Литература

1. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. М. Высшая школа. 1970. 710 с.
2. Нобл В. Применение метода Винера - Хопфа для решения дифференциальных уравнений с частными производными. М. ИЛ. 1962. 279 с.
3. Багдоев А. Г. - Изв. АН АрмССР. Механика. 1974. Т. 27. N 2. С. 13-23.

**ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ա. Գ. Բազդուն, Ա. Ն. Մարտիրոսյան,
Հ. Ա. Մարտիրոսյան**

**Երկշերտ միջավայրում էլեկտրամագնիսական ալիքների տարածումը տատանակից՝
իդեալական հաղորդիչ կիսաանվերջ հերանի առկայությամբ**

Քննարկվում է գծային էլեկտրադինամիկ խնդիրը վերին կիսահարթությունում գտնվող
իմպուլսային տատանակի ազդեցության հաշվարկի վերաբերյալ՝ իրական բացասական
կիսաառանցքի վրա իդեալական հաղորդիչ հերանի առկայությամբ: