

УДК 515.1

Э. А. Мирзаханян, Н. Э. Мирзаханян

О K_0 -парах Борсука в гильбертовом пространстве

(Представлено чл.-кор. НАН РА Г. Г. Геворкяном 12/V 2004)

Статья посвящена бесконечномерной гомотопической топологии вещественного гильбертова пространства H . В ней определяется одна модификация важного классического топологического понятия пары Борсука [1]. Модифицированные пары (X, A) называются K_0 -парами Борсука. Они образуются множествами $A \subset X \subset H$, а рассматриваемые отображения принадлежат одному специальному классу K_0 непрерывных отображений подмножеств из H .

В работе приводятся некоторые свойства K_0 -пар Борсука в случае сепарабельного гильбертова пространства.

1. Допустимые отображения. В этом пункте приводятся определения допустимых отображений и некоторых необходимых понятий, а также сведения, относящиеся к этим отображениям [2-5].

Рассмотрим произвольное вещественное гильбертово пространство H .

Определение 1. Непрерывное отображение $f : G \rightarrow H$ открытого в H множества G в H называется K_0 -отображением, если выполнено следующее условие: (K_0) для любой точки $x_0 \in G$ и любого вещественного числа $\varepsilon > 0$ существуют окрестность $U \subset G$ точки x_0 , линейное конечномерное подпространство $L \subset H$ и вещественные числа λ и $\delta \in (0, (\pi)/2]$ такие, что если для точек $x, y \in U$ угол между вектором $x - y$ и подпространством L не меньше $(\pi)/2 - \delta$, то выполнено соотношение

$$\|f(x) - f(y) - \lambda(x - y)\| \leq \varepsilon \|x - y\|.$$

Важным характеризующим свойством K_0 -отображений является тот факт, что фигурирующее в условии (K_0) число λ можно выбрать так, чтобы оно зависело лишь от точки x_0 , но не от числа ε . Получающаяся при этом единственная, непрерывная вещественнозначная функция $\lambda(x) = \lambda_f(x)$, $x \in G$, называется терминальной производной отображения $f : G \rightarrow H$; композиция двух K_0 -отображений есть K_0 -отображение и из ортопроекторов $p : H \rightarrow L$ K_0 -отображением являются только те, когда L -конечномерно или имеет конечную коразмерность относительно H .

Пусть теперь M - произвольное (необязательно открытое) подмножество из H . Непрерывное отображение $f : M \rightarrow H$ называется K_0 -отображением, если существуют открытое в H множество G , содержащее M и K_0 -отображение $g : G \rightarrow H$ такое, что $f(x) = g(x)$ для любого $x \in M$.

Пусть далее M и N - произвольные подмножества пространства H . Непрерывное отображение $f : M \rightarrow N$ называется K_0 -отображением, если композиция $i \circ f : M \rightarrow H$ является K_0 -отображением, где $i : N \rightarrow H$ есть вложение. Наконец, гомеоморфизм $f : M \rightarrow N$ называется K_0 -гомеоморфизмом, если оба отображения f и $f^{-1} : N \rightarrow M$ суть K_0 -отображения.

Определение 2. Семейство (f_t) , $0 \leq t \leq 1$ K_0 -отображений $f_t : M \rightarrow N$ называется K_0 -гомотопией, если отображение $F : I \times M \rightarrow N$, определяемое формулой $F(t, x) = f_t(x)$, $x \in M$, $t \in I$, $I = [0, 1]$, является K_0 -отображением.

Далее, K_0 -отображения $f, g : M \rightarrow N$ называются K_0 -гомотопными и пишут $f \stackrel{K_0}{\cong} g$, если существует связывающая их K_0 -гомотопия, т.е. такая K_0 -гомотопия (f_t) , что $f_0 = f$ и $f_1 = g$. Эквивалентным образом f, g называются K_0 -гомотопными, если существует K_0 -отображение $F : I \times M \rightarrow N$ такое, что $F(0, x) = f(x)$ и $F(1, x) = g(x)$ для каждой точки $x \in M$.

Определение 3. Декартово произведение $X \times Y$ подмножеств из H называется K_0 -допустимым, если скалярное произведение $x|y = 0$ для любых точек $x \in X$, $y \in Y$ и обе проекции $(x, y) \rightarrow x$ и $(x, y) \rightarrow y$ являются K_0 -отображениями.

Определение 4. Пусть $A \subset X \subset H$. Множество A называется K_0 -ретрактом множества X , если существует K_0 -отображение $r : X \rightarrow A$, называемое K_0 -ретракцией X на A , такое, что $r|_A = \text{id}_A$, т.е. $ro i = \text{id}_A$, где $i : A \rightarrow X$ есть вложение; ретракт A называется K_0 -деформационным ретрактом для X , если существует такая K_0 -ретракция $r : X \rightarrow A$, называемая K_0 -деформационной ретракцией, что выполнено условие: $i \circ r \stackrel{K_0}{\cong} \text{id}_X$; если эта K_0 -гомотопия будет неподвижной, т.е. связанной на A , то r называется K_0 -строгой (или сильной) деформационной ретракцией, а A называется K_0 -строгим (сильным) деформационным ретрактом для X .

Существуют окрестностные варианты этих ретрактов, а именно: A называется окрестностным K_0 -ретрактом, окрестностным K_0 -деформационным ретрактом и окрестностным K_0 -строгим деформационным ретрактом для X , если существует такое открытое в X подмножество $U \supset A$, что A является соответственно K_0 -ретрактом, K_0 -деформационным ретрактом и K_0 -строгим деформационным ретрактом для U .

Определение 5. Непрерывное отображение $f : M \rightarrow H$ будем называть локальным K_0 -отображением, если существует такое открытое покрытие (U_α) , $\alpha \in A$, подпространства M , что при любом $\alpha \in A$ ограничение $f_\alpha = f|_{U_\alpha} : U_\alpha \rightarrow H$ отображения f является K_0 -отображением, т.е. существуют открытое в H подмножество G_α и K_0 -отображение $g_\alpha : G_\alpha \rightarrow H$ такое, что $g_\alpha|_{U_\alpha} = f_\alpha$.

Имеет место важное утверждение: в случае сепарабельного гильбертова пространства H отображение $f : M \rightarrow H$ будет K_0 -отображением тогда и только тогда, когда оно является

локальным K_0 -отображением [см. 4].

2. О K_0 -парах Борсука. Пусть N - произвольное зафиксированное вещественное гильбертово пространство N . В этом пункте вводится одна модификация топологического понятия пары Борсука для пар подмножеств пространства N и устанавливается ряд свойств таких пар.

Определение 6. Пусть A и X - подмножества из N ; K_0 -отображение $i : A \rightarrow X$ будем называть K_0 -корасслоением или обладающим свойством распространения K_0 -гомотопий, если для любого подмножества Y из N , любого K_0 -отображения $f : X \rightarrow Y$ и K_0 -гомотопии $g_t : A \rightarrow Y$, такой, что $g_0 = f \circ i$, существует такая K_0 -гомотопия $f_t : X \rightarrow Y$, что $f = f_0$ и $f_t \circ i = g_t$ для каждой точки $t \in I$, $I = [0,1]$.

Композиция двух K_0 -корасслоений есть также K_0 -расслоение.

Мы будем рассматривать важный частный случай понятия K_0 -корасслоения - понятие K_0 -пары Борсука.

Определение 7. Пару (X,A) подмножеств пространства N будем называть K_0 -парой Борсука, если отображение включения $i : A \rightarrow X$ представляет собой K_0 -корасслоение.

Таким образом, пара (X,A) есть K_0 -пара Борсука, если для каждого $Y \subset N$, K_0 -отображения $f : X \rightarrow Y$ и частичной гомотопии $g_t : A \rightarrow Y$ отображения f , ($g_0 = f|_A$), существует K_0 -продолжение K_0 -гомотопии g_t , т.е. такая K_0 -гомотопия $f_t : X \rightarrow Y$, что $f_0 = f$ и $f_t|_A = g$ для каждой $t \in I$.

Из сказанного выше следует, что если (X,A,B) - такая тройка подмножеств из N , что пары (X,A) и (A,B) суть K_0 -пары Борсука, то и пара (X,B) будет также парой Борсука.

Одно из важных свойств K_0 -пар Борсука состоит в следующем: пусть (X,A) - K_0 -пара Борсука, $g, g' : A \rightarrow Y$ суть K_0 -гомотопные K_0 -отображения; тогда если одно из этих отображений продолжимо до K_0 -отображения X в Y , то и другое K_0 -продолжимо.

Из сказанного следует, что свойство K_0 -распространимости до X K_0 -отображения $g : A \rightarrow Y$ зависит от K_0 -гомотопического класса отображения g .

Приведем эквивалентную форму определения понятия K_0 -пары Борсука.

Определение 8. Пару (X,A) подмножеств из N будем называть K_0 -парой Борсука, если для любого подмножества Y из N , K_0 -отображения $f : X \rightarrow Y$, K_0 -гомотопии $G : I \times A \rightarrow Y$ такой, что $G(0,x) = f(x)$ для каждой точки $x \in A$, существует K_0 -отображение $F : I \times X \rightarrow Y$ такое, что $F(0,x) = f(x)$ для каждой точки $x \in X$ и $F(t,x) = G(t,x)$ при $t \in I$ и $x \in A$.

В оставшейся части статьи пространство N будет предполагаться сепарабельным, т.е. обладающим счетным базисом.

Определение 9. Пара (X,A) подмножеств из N называется парой, допускающей терминальные производные, если подмножества A и X являются множествами, допускающими терминальные производные [6].

Теорема 1. Для того, чтобы допускающая терминальные производные пара (X,A) была K_0 -парой Борсука, необходимо и достаточно, чтобы подмножество $\tilde{A} = (0 \times X) \cup (I \times A)$ цилиндра I

$\times X$ было K_0 -ретрактом для $I \times X$.

Топологическую пару (Z, C) принято называть замкнутой, если подпространство C замкнуто в Z . Поскольку гильбертово пространство H хаусдорфово, то из теоремы 1 можно заключить, что K_0 -пара Борсука (X, A) есть замкнутая пара.

Предложение 1. Пусть (X, A) - замкнутая пара, допускающая терминальные производные, и $Y \subset H$ такое подмножество из H , для которого декартовы произведения $X \times Y$ и $A \times Y$ являются K_0 -допустимыми [см. опр. 3], тогда пара $(X \times Y, A \times Y)$ является K_0 -парой Борсука.

Замечание. Предложение 1 верно также для пары $(Y \times X, Y \times A)$, в частности для пары $I \times X, I \times A$.

Предложение 2. Пусть $X = A \cup B$, где множества A, B и $C = A \cap B$ замкнуты в X и являются множествами, допускающими терминальные производные. Тогда, если пара (A, C) является K_0 -парой Борсука, то и (X, B) также является K_0 -парой Борсука.

Предложение 3. Пусть (X, A) - замкнутая пара, допускающая терминальные производные, и A есть K_0 -деформационный ретракт подпространства X . Тогда, если пара $(I \times X, X_A)$, где $X_A = (0 \times X) \cup (I \times A) \cup (1 \times X)$, является K_0 -парой Борсука, то A будет K_0 -строгим деформационным ретрактом подпространства X .

Предложение 4. Пусть (X, A) - замкнутая и допускающая терминальные производные K_0 -пара Борсука. Если A является K_0 -слабым деформационным ретрактом подпространства X , то A будет K_0 -деформационным ретрактом подпространства X .

Определение 10. Подмножество A подпространства X называется окрестностным K_0 -строгим деформационным ретрактом в слабом смысле подпространства X , если существуют такие открытые в X множества $U \supset A$ и такая K_0 -гомотопия $g_t : U \rightarrow X$, что g_t неподвижна на A , $g_0(x) = x$ для каждой точки $x \in U$ и $g_1(x) \in A$ для $x \in U$ (см. п.1).

В теореме 2 приводится локальная характеристика K_0 -пар Борсука.

Теорема 2. Пусть X, A - замкнутая и допускающая терминальные производные пара. Тогда, если (X, A) является K_0 -парой Борсука, то A является окрестностным K_0 -строгим деформационным ретрактом в слабом смысле подпространства X .

Обратно, если A является K_0 -строгим деформационным ретрактом в слабом смысле некоторого открытого в X подмножества $U \supset A$ и существует K_0 -функция Урысона $\varphi : X \rightarrow I$ пары $A, X \setminus U$ и $A = \varphi^{-1}(0)$, то (X, A) будет K_0 -парой Борсука.

Следствие. Пара (B, S) состоящая из единичного замкнутого шара B и единичной сферы S пространства H является K_0 -парой Борсука.

В самом деле, в соответствии с теоремой 2 надо положить $U = B \setminus \{0\}$, K_0 -гомотопию $g_t : U \rightarrow B$ определить по формуле $g_t(x) = (1 - t)x + t[x / (||x||)]$, а в качестве функции $\varphi : B \rightarrow I$ рассмотреть функцию $\varphi : x \rightarrow 1 - ||x||^2$.

Литература

1. *Постников М. М.* Лекции по алгебраической топологии. Основы теории гомотопий. М. 1984.
2. *Болтянский В. Г.* - Изв.АН АрмССР. Математика. 1974. Т. 9. N 2. С. 107-120.
3. *Мирзаханян Э. А.* - Уч. записки ЕГУ. 1986. N 2. С. 28-33.
4. *Мирзаханян Э. А.* - Уч. записки ЕГУ. 1990. N 3. С. 21-28.
5. *Мирзаханян Э. А.* - Изв. НАН РА. Математика. 1998. Т. 33. N 6. С. 10-27.
6. *Мирзаханян Э. А.* - Изв. НАН РА. Математика. 2002. Т. 37. N 4. С. 31-44.

Է. Ա. Միրզախանյան, Ն. Է. Միրզախանյան

Հիլբերտյան տարածությունում Բորսուկի K_0 -գույգերի վերաբերյալ

Հոդվածը նվիրված է իրական H հիլբերտյան տարածության անվերջ չափողականությամբ հոմոտոպիական տոպոլոգիային: Սահմանվում է կարևոր տոպոլոգիական դասական գաղափարի՝ Բորսուկի գույգի մի մոդիֆիկացիա [1]: Մոդիֆիկացված (X, A) գույգերը կոչվում են Բորսուկի K_0 -գույգեր և կազմված են $A \subset X \subset H$ ենթաբազմություններից: Դիտարկվող արտապատկերումները պատկանում են H տարածության ենթաբազմությունների անընդհատ արտապատկերումների K_0 հատուկ դասին:

Բերված են Բորսուկի K_0 -գույգերի որոշ հատկություններ սեպարաբել հիլբերտյան տարածության դեպքում: Հիմնական արդյունքներն են՝ 1 և 2 թեորեմները: