

Н. М. Испирян

Распространение электромагнитной волны в произвольной неограниченной периодической среде

(Представлено академиком Д. М. Седракином 18/V 2004)

В последнее время возрос интерес к теории распространения волн в периодических слоистых средах, что в основном обусловлено новыми технологическими успехами в разработке пассивных и активных тонкопленочных волноводов, а также твердотельных, оптических и акустических решеток, получивших большое практическое применение [1-3].

В данной работе нами рассматривается задача определения спектра собственных мод линейно поляризованной плоской электромагнитной волны, распространяющейся в произвольной одномерной неограниченной периодической среде. Для данной среды изменение диэлектрической проницаемости в пространстве в наиболее общем виде может быть представлено следующим образом:

$$\tilde{\epsilon}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \epsilon(z - Ln) \theta(nL - z) \theta[z - (n - 1)L], \quad (1)$$

где L - период среды, $\epsilon(z)$ - произвольная функция, $\theta(z)$ - ступенчатая функция Хевисайда.

Для удобства при выводе уравнения, определяющего спектр собственных мод системы (1), предположим, что между двумя произвольными соседними элементами периодической среды существует бесконечно малая область, в которой диэлектрическая проницаемость равна единице:

$$\tilde{\epsilon}(z) = 1, \quad \text{где } nL - 0 < z < nL + 0, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (2)$$

Как мы увидим ниже, данное предположение никоим образом не влияет на окончательный результат. Однородность среды в областях пространства (2) позволяет рассматривать в них

волновое поле $\vec{U}(\vec{r}, t)$ в виде суммы распространяющихся в противоположных направлениях гармонических во времени плоских линейно поляризованных мод:

$$\vec{U}(\vec{r}, t) = \sum_n \vec{Re}[\psi(z) \exp\{ik_{0x}x\} \exp\{-i\omega t\}], \quad (3)$$

$$\psi(z) = A_{n-1} \exp\{ik_{0z}z\} + B_{n-1} \exp\{-ik_{0z}z\}, \quad (4)$$

где для проекций волнового вектора на оси z и x введены обозначения

$$k_{0z} = \frac{\omega}{c} \cos \alpha, \quad k_{0x} = \frac{\omega}{c} \sin \alpha.$$

Единичный вектор $\vec{n}$ определяет направление поляризации волны. Заметим, что в (3) предполагается, что волновой вектор расположен в плоскости (z, x) .

С учетом (3), (4) волновое уравнение для s -волн удобно записать с помощью напряженности электрического поля, в то время как для p -волн - с помощью напряженности магнитного поля

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = (0, E^s(z) \exp\{ik_{0x}x\} \exp\{-i\omega t\}, 0), \quad (5.a)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = (0, H^p(z) \exp\{-ik_{0x}x\} \exp\{-i\omega t\}, 0). \quad (5.b)$$

Для полей $E^s(z)$ и $H^p(z)$ волновые уравнения имеют следующий вид [4]:

$$\frac{d^2 E^s}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} (\tilde{\epsilon}(z) \sin^2 \alpha) E^s = 0, \quad (6)$$

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\tilde{\epsilon}(z)} \frac{dH^p(z)}{dz} \right) + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\tilde{\epsilon}(z)} \right) = 0. \quad (7)$$

Из (3), (4) и (6), (7) непосредственно следует, что функция $\psi(z)$, в зависимости от поляризации волны $\vec{n}$, определяет или $E^s(z)$, или $H^p(z)$, т.е.

$$\psi(z) = \begin{cases} E^s(z), \\ H^p(z). \end{cases} \quad (8)$$

Согласно известной теореме Блоха, решение волнового уравнения для периодической среды должно удовлетворять следующему условию [4]:

$$\psi(z) = \exp\{i\beta z\} u(z), \quad (9)$$

где $u(z)$ периодическая с периодом L функция, а величина β называется квазиволновым числом.

Как мы покажем ниже, условие (9), а также знание амплитуды прохождения волны для структурного элемента периодической среды позволяют полностью определить спектр собственных мод. Для этого запишем связь между коэффициентами решения (4) в точках nL и $(n + 1)L$ через матрицу переноса одного структурного элемента периодической системы (см., например, [4]):

$$\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1/t_n^{s,p})^* & (-r_n^{s,p}/t_n^{s,p})^* \\ -r_n^{s,p}/t_n^{s,p} & 1/t_n^{s,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1} \\ B_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где t_n^s, r_n^s и t_n^p, r_n^p являются амплитудами прохождения и отражения для s - и p -волн для n -ого структурного элемента, граничащего с обеих сторон с вакуумом. Так как структурные элементы периодической среды идентичны, то для них амплитуды прохождения электрона совпадают, в то время как амплитуды отражения отличаются фазовым множителем [6]:

$$t_n^{s,p} = t_{s,p}, \quad r_n^{s,p} = r_{s,p} \exp\{i2k_{0z}L(n-1)\}, \quad (11)$$

где через $t_{s,p}$ и $r_{s,p}$ обозначены амплитуды рассеяния волны для первого ($n = 1$) структурного элемента среды.

С учетом (11) матричное соотношение (10) может быть записано в следующем виде:

$$A_n = \frac{1}{t_{s,p}^*} A_{n-1} - \frac{r_{s,p}^*}{t_{s,p}^*} \exp\{-i2k_{0z}L(n-1)\} B_{n-1}, \quad (12)$$

$$B_n = -\frac{r_{s,p}}{t_{s,p}} \exp\{i2k_{0z}L(n-1)\} A_{n-1} + \frac{1}{t_{s,p}} B_{n-1}. \quad (13)$$

Будем искать решение системы уравнений (12), (13) в следующем виде:

$$A_n = A_0 \exp\{i(\beta - k_{0z})nL\}, \quad B_n = B_0 \exp\{i(\beta + k_{0z})nL\}, \quad (14)$$

где β - квазиволновое число (см. (9)). Подставляя (14) в (12), (13) и требуя, чтобы это выполнялось для произвольного n , для величин A_0, B_0 получим следующую систему линейных однородных уравнений:

$$(1/t_{s,p}^* - \exp\{i(\beta - k_{0z})L\})A_0 - (r_{s,p}^*/t_{s,p}^*)B_0 = 0, \quad (15)$$

$$(-r_{s,p}/t_{s,p})A_0 + (1/t_{s,p} - \exp\{i(\beta + k_{0z})L\})B_0 = 0. \quad (16)$$

Из (15), (16) следует, что волновое поле определяется с точностью до одной произвольной постоянной. Требование нетривиальности решения системы уравнений (15), (16) дает

$$\exp\{i2\beta L\} - \exp\{i\beta L\} \cdot 2\operatorname{Re}\left[\exp\{-ik_{0z}L\}/t_{s,p}\right] + 1 = 0. \quad (17)$$

При выводе (17) мы учли

$$|t_{s,p}|^2 + |r_{s,p}|^2 = 1.$$

Из (17) непосредственно следует, что

$$\cos(\beta L) = \operatorname{Re}\left[\exp\{-ik_{0z}L\}/t_{s,p}\right]. \quad (18)$$

Требование действительности квазиволнового числа β приводит к неравенству

$$|\cos(\beta L)| \leq L. \quad (19)$$

Неравенство (19) с учетом (18) дает спектр собственных мод плоской электромагнитной волны для произвольной одномерной неограниченной периодической среды. Как видно из (18), знание амплитуды прохождения волны для структурного элемента среды непосредственно приводит к уравнению, определяющему спектр мод.

Рассмотрим частный случай периодической среды, когда структурный элемент представляет собой систему из двух однородных слоев, т.е

$$\tilde{\epsilon}(z) = \begin{cases} \epsilon_1, & nL < z < nL + d, \\ 1, & nL + d < z < (n+1)L, \end{cases} \quad (20)$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. В этом случае амплитуды прохождения s- и p-волн имеют вид [7]

$$\frac{1}{t_s} = \exp(ik_{0z}d) \left\{ \cos(k_z d) + i \frac{k_z^2 - k_{0z}^2}{2k_z k_{0z}} \sin(k_z d) \right\}, \quad (21)$$

$$\frac{1}{t_p} = \exp(ik_{0z}d) \left\{ \cos(k_z d) + i \frac{(k_z^2/\epsilon) - (\epsilon \cdot k_{0z}^2)}{2k_z k_{0z}} \sin(k_z d) \right\}, \quad (22)$$

где $k_z = (\omega/c) \sqrt{\epsilon_1} \cos\gamma$ и $\sqrt{\epsilon_1} \sin\gamma = \sin\alpha$. Подставляя (21), (22) в (18), имеем

$$\cos(\beta^s L) = \cos[k_{0z}(L - d)]\cos(k_z d) - \frac{k_{0z}^2 + k_z^2}{2k_{0z}k_z} \sin[k_{0z}(L - d)]\sin(k_z d), \quad (23)$$

$$\cos(\beta^p L) = \cos[k_{0z}(L - d)]\cos(k_z d) - \frac{\varepsilon k_{0z}^2 + k_z^2/\varepsilon}{2k_{0z}k_z} \sin[k_{0z}(L - d)]\sin(k_z d). \quad (24)$$

Уравнения (23), (24) являются известными классическими уравнениями, определяющими квазиволновые числа β^s и β^p s- и p-волн для неограниченной периодической системы со структурным элементом, состоящим из двух однородных слоев [7].

Автор выражает благодарность академику Д. М. Седракяну, а также А. Ж. Хачатрянцу за полезное обсуждение полученных результатов.

Государственный инженерный университет Армении

Литература

1. *Karlsson A., Stewart R.* - J. Opt. Soc. Am. A. 1995. V. 12. P. 1513.
2. *Elson J. M., Tran P.* - J. Opt. Soc. Am. A. 1995. V. 12. P. 1766.
3. *James S. P., Tatam R. T.* - Meas. Sci. Technol. 2003. V. 14. P. 49.
4. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М. Наука. 1973.
5. *Sedrakian D. M., Gevorgyan A. H., Khachatrian A. Zh.* - Optics Communication. 2001. V. 192. P. 135.
6. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М. Наука. 1973.
7. *Ярив А., Юх П.* Оптические волны в кристаллах. М. Мир. 1987.

Ն. Մ. Իսպիրյան

Էլեկտրամագնիսական ալիքի տարածումը կամայական անսահմանափակ պարբերական միջավայրում

Աշխատանքում ստացված է անսահմանափակ պարբերական միջավայրում տարածվող գծային բևեռացված հարթ էլեկտրամագնիսական ալիքի սեփական մոդերը որոշող ընդհանուր արտահայտություն: Ցույց է տրված, որ իմանալով ալիքի անցման ամպլիտուդը պարբերական միջավայրի մեկ կառուցվածքային տարրական միավորի համար, հնարավոր է անմիջականորեն ստանալ մոդերի սպեկտրները որոշող հավասարումը: