

УДК 517.518.4, 517.518.8, 517.538.3

Академик А. Б. Нерсисян, А. В. Погосян

Об одной линейной рациональной аппроксимации на конечном отрезке

(Представлено 16/II 2004)

1. Введение. Восстановление гладкой на конечном отрезке функции $f(x)$, $x \in [-1,1]$, с использованием конечного числа ее коэффициентов Фурье

$$f_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) e^{-i\pi n x} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N, \quad 0 < N < \infty \quad (1)$$

является одной из классических задач.

В теории тригонометрических рядов (см.[1]) основное внимание обращено на свойства отрезка ряда Фурье $S_N(f)$ и остатка $R_N(f)$

$$S_N(f)(x) := \sum_{n=-N}^N f_n e^{i\pi n x}, \quad R_N(f)(x) := f(x) - S_N(f)(x). \quad (2)$$

Однако $S_N(f)$, $N \gg 1$, является оптимальным аппаратом приближения к $f(x)$ на $[-1,1]$ (будь то в равномерной или иной разумной метрике) лишь в случае, когда $f(x)$ продолжается на ось $x \in (-\infty, \infty)$, как периодическая функция (с периодом 2), без потери гладкости. В противном случае локальная сходимость в окрестностях точек $x = \pm 1$ оказывается гораздо более медленной (а при $f(1) \neq f(-1)$ и вовсе отсутствующей из-за явления Гиббса), чем вдали от этих точек.

Среди многочисленных работ, посвященных эффективным альтернативным подходам, отметим те, которые являются развитием идеи, использованной в работе А. Крылова [2] и в дальнейшем развитой в работах Д. Готтлиба и Экгофа ([3,4]) на основе использования многочленов Бернулли.

С другой стороны, заметной эффективностью обладает метод Фурье - Паде (см. [5,6]), однако он является существенно нелинейным.

В предложенной работе используется подход, близкий к методу Фурье - Паде, однако являющийся линейным и, в определенном смысле, оптимальным при аппроксимации гладкой на всем отрезке $[-1,1]$ функции $f(x)$ рациональной тригонометрической функцией с использованием коэффициентов $\{f_n\}$, $|n| \leq N$.

Основным аппаратом данного исследования является построение "предельной функции",

впервые изученной Валле-Пуссенем еще в 1908 г. (см. [8]).

2. Постановка задачи. Рассмотрим конечное число комплексных чисел в виде вектора $\theta := \{\theta_k\}_{k=-p}^p$, $p \geq 1$ и положим

$$\Delta_n^0(\theta) = f_n, \Delta_n^k(\theta) = \Delta_n^{k-1}(\theta) + \theta_{k \operatorname{sgn}(n)} \Delta_{(|n|-1) \operatorname{sgn}(n)}^{k-1}(\theta), k \geq 1, \quad (3)$$

где $\operatorname{sgn}(n) = 1$ при $n \geq 0$ и $\operatorname{sgn}(n) = -1$ при $n < 0$.

Запишем (2) в виде

$$R_N(f)(x) = R_N^+(f)(x) + R_N^-(f)(x),$$

$$R_N^+(f)(x) := \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n e^{i\pi n x}, \quad R_N^-(f)(x) := \sum_{n=-\infty}^{-N-1} f_n e^{i\pi n x}.$$

Применением преобразования Абеля легко убедиться, что в случае $|\theta_1| \neq 1$

$$R_N^+(f)(x) = -\frac{\theta_1 f_N e^{i\pi(N+1)x}}{1 + \theta_1 e^{i\pi x}} + \frac{1}{1 + \theta_1 e^{i\pi x}} \sum_{n=N+1}^{\infty} \Delta_n^1(\theta) e^{i\pi n x}.$$

После p -кратного повторения такого преобразования приходим к следующему разложению ошибки $R_N^+(f)(x)$ ($|\theta_k| \neq 1$, $k = -p, \dots, p$):

$$R_N^+(f)(x) = -e^{i\pi(N+1)x} \sum_{k=1}^p \frac{\theta_k \Delta_N^{k-1}(\theta)}{\prod_{s=1}^k (1 + \theta_s e^{i\pi x})} + \frac{1}{\prod_{k=1}^p (1 + \theta_k e^{i\pi x})} \sum_{n=N+1}^{\infty} \Delta_n^p(\theta) e^{i\pi n x}.$$

Аналогичные разложения для $R_N^-(f)(x)$ приводят к следующей формуле:

$$S_{p,N}(\theta, f)(x) := \sum_{n=-N}^N f_n e^{i\pi n x} - e^{i\pi(N+1)x} \sum_{k=1}^p \frac{\theta_k \Delta_N^{k-1}(\theta)}{\prod_{s=1}^k (1 + \theta_s e^{i\pi x})} -$$

$$- e^{-i\pi(N+1)x} \sum_{k=1}^p \frac{\theta_{-k} \Delta_{-N}^{k-1}(\theta)}{\prod_{s=1}^k (1 + \theta_{-s} e^{-i\pi x})}, \quad (4)$$

которую будем считать аппроксимационной, с ошибкой

$$R_{p,N}(\theta, f)(x) := f(x) - S_{p,N}(\theta, f)(x) = R_{p,N}^+(\theta, f)(x) + R_{p,N}^-(\theta, f)(x), \quad (5)$$

$$R_{p,N}^{\pm}(\theta, f)(x) := \frac{1}{\prod_{k=1}^p (1 + \theta_{\pm k} e^{\pm i \pi x})} \sum_{n=N+1}^{\infty} \Delta_{\pm n}^p(\theta) e^{\pm i \pi n x}. \quad (6)$$

Наша задача состоит в минимизации равномерной ошибки $R_{p,N}(\theta, f)$ на всем отрезке $[-1, 1]$ соответствующим выбором параметров $\{\theta_k\}$. Отметим, что если параметры $\{\theta_k\}$ определять из следующих двух систем:

$$\Delta_n^p(\theta) = 0, \quad n = -N - p, \dots, -N - 1; \quad n = N + 1, \dots, N + p, \quad (7)$$

то придем к хорошо известной аппроксимации Фурье - Паде $[N + p/p]_F$

3. Теоретические результаты. 3.1. Пусть $f \in C^q[-1, 1]$. Обозначим

$$A_k(f) = f^{(k)}(1) - f^{(k)}(-1), \quad k = 0, \dots, q. \quad (8)$$

Теорема 1 [9]. Пусть $f \in C^q[-1, 1]$, $q \geq 0$, $f^{(q+1)} \in L_1[-1, 1]$ и $A_j(f) = 0$ для $j = 0, \dots, q - 1$. Тогда при $x = 1 - [h/N]$, $h = \text{const} \geq 0$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^q R_N(f) \left(1 - \frac{h}{N} \right) = A_q(f) L_q(h), \quad (9)$$

$$L_q(h) = \frac{(-1)^q}{\pi^{q+1}} \int_1^{\infty} \frac{\sin \left(\pi h x - \frac{\pi q}{2} \right)}{x^{q+1}} dx. \quad (10)$$

В данном случае (см. [1]) равномерная ошибка на $[-1, 1]$ характеризуется величиной

$$I_q = \max_{h \geq 0} |L_q(h)|. \quad (11)$$

В таблице 1 представлены значения этой величины для различных значений q .

Таблица 1

Равномерные ошибки при аппроксимации рядом Фурье
для различных значений q .

q	0	1	2	3	4	5	6
I_q	0.5	0.101321	0.012382	0.003421	0.000744	0.000208	0.000052

3.2. Проведем теперь аналогичные исследования для аппроксимации $S_{p,N}(\theta, f)$. Сначала докажем несколько лемм.

Лемма 1 Пусть

$$\omega_{k,m} := \sum_{s=0}^k C_k^s (-1)^s s^m, \quad 0 \leq m \leq k, \quad (12)$$

где $C_k^s = [k!/(s!(k-s)!)]$. Тогда

$$\omega_{k,m} = \begin{cases} 0, & m < k \\ (-1)^k k!, & m = k. \end{cases} \quad (13)$$

Доказательство. Обозначим

$$\varphi_{k,0}(z) := (1+z)^k = \sum_{s=0}^k C_k^s z^s, \quad \varphi_{k,m}(z) := z \varphi'_{k,m-1}(z), \quad m \geq 1.$$

Теперь достаточно заметить, что $\varphi_{k,m}(-1) = \omega_{k,m}$.

Далее, через $\gamma_k(p), k = 0, \dots, p$, обозначим, коэффициенты следующего полинома:

$$\prod_{k=1}^p (1 + \tau_k x) \equiv \sum_{k=0}^p \gamma_k(p) x^k. \quad (14)$$

Лемма 2 Пусть $f \in C^{q+p}[-1,1]$, $q \geq 0$, $p \geq 1$, $f^{(q+p+1)} \in L_1[-1,1]$ и $A_j(f) = 0$ для $j = 0, \dots, q-1$. Если

$$\theta_k = \theta_{-k} = 1 - \frac{\tau_k}{N}, \quad k = 1, \dots, p, \quad (15)$$

то имеет место следующее асимптотическое разложение

$$\Delta_n^p(\theta) = A_q(f) \frac{(-1)^{n+p+1}}{2(i\pi)^{q+1}q!} \sum_{k=0}^p \frac{(q+p-k)!(-1)^k \gamma_k(p)}{N^k(n-k)^{q+1}|n-k|^{p-k}} + o(n^{-q-p-1}) \quad (16)$$

при $N \rightarrow \infty$, $|n| \geq N+1$.

Доказательство. Если в (??) взять $\theta_k \equiv 1$, $|k| \leq p$, то положим $\Delta_n^k := \Delta_n^k(\theta)$. Это хорошо известные классические конечные разности.

По индукции легко показать, что

$$\Delta_n^p(\theta) \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k \gamma_k(p)}{N^k} \Delta_{n-k}^{p-k}. \quad (17)$$

Снова по индукции

$$\Delta_n^k = \sum_{j=0}^k C_k^j f_{(|n|-j)\text{sgn}(n)}, \quad C_k^j = \frac{k!}{j!(k-j)!}. \quad (18)$$

Для получения асимптотики коэффициентов Фурье проинтегрируем по частям (1), $p + q + 1$ раза

$$f_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \sum_{s=q}^{p+q} \frac{A_s(f)}{(i\pi n)^{s+1}} + \frac{1}{2(i\pi n)^{p+q+1}} \int_{-1}^1 f^{(p+q+1)}(x) e^{-i\pi n x} dx, \quad (19)$$

где последнее слагаемое имеет порядок $o(n^{-p-q-1})$ при $n \rightarrow \infty$ согласно хорошо известной теореме Римана - Лебега [1]. Согласно (18) получим

$$\Delta_n^k = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \sum_{s=q}^{p+q} \frac{A_s(f)}{(i\pi n)^{s+1}} \sum_{j=0}^k C_k^j \frac{(-1)^j}{\left(\begin{matrix} j \\ 1 - \frac{j}{|n|} \end{matrix} \right)^{s+1}} + o(n^{-p-q-1}) \quad (20)$$

при $n \rightarrow \infty$ и $0 \leq k \leq p$.

Далее, положим $g_s(x) = (1-x)^{-s-1}$. С помощью разложения в ряд Тейлора и леммы 1 получим

$$\sum_{j=0}^k C_k^j \frac{(-1)^j}{\left(\begin{matrix} j \\ 1 - \frac{j}{|n|} \end{matrix} \right)^{s+1}} = \sum_{m=0}^k \frac{g_s^{(m)}(0)}{m!|n|^m} \omega_{k,m} + o(n^{-k}) = \frac{(k+s)!(-1)^k}{s!|n|^k} + o(n^{-k}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Подставив это в (20), получим

$$\Delta_n^k = A_q(f) \frac{(-1)^{n+k+1} (q+k)!}{2 (i\pi n)^{q+1} q! |n|^k} + o(n^{-k-q-1}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Это вместе с (17) завершает доказательство.

3.3. Сначала изучим сходимость аппроксимации $S_{p,N}(\theta, f)$ внутри (вдали от концов) отрезка $[-$

1,1]. Следующую теорему легко доказать с помощью леммы 2.

Теорема 2. Пусть $f \in C^{q+p}[-1,1]$, $q \geq 0$, $p \geq 1$, $f^{(q+p+1)} \in L_1[-1,1]$ и $A_j(f) = 0$ для $j = 0, \dots, q-1$.

Если $\theta_k = 1 - \tau_k/N$, $\tau_k > 0$ и $|x| < 1$, то для достаточно больших N имеет место следующая оценка:

$$N^{q+p}|R_{p,N}(\theta, f)| \leq \text{const } |A_q(f)|. \quad (21)$$

Рассмотрим теперь поведение ошибки $R_{p,N}(\theta, f)(x)$ в окрестности точки $x = 1$.

Теорема 3. Пусть $f \in C^{q+p}[-1,1]$, $q \geq 0$, $p \geq 1$, $f^{(q+p+1)} \in L_1[-1,1]$ и $A_j(f) = 0$ для $j = 0, \dots, q-1$.

Если

$$\theta_k = \theta_{-k} = 1 - \frac{\tau_k}{N}, \quad k = 1, \dots, p, \quad \tau_k > 0, \quad \tau_j \neq \tau_i, \quad j \neq i, \quad (22)$$

тогда при $x = 1 - [h/N]$, $h = \text{const} \geq 0$ имеет место следующая асимптотическая формула:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^q R_{p,N}(\theta, f) \left(1 - \frac{h}{N} \right) = A_q(f) L_{q,p}(h), \quad (23)$$

$$L_{q,p}(h) = L_q(h) +$$

$$+ \frac{(-1)^{p+1}}{q! \pi^{q+1}} \text{Re} \left(\frac{e^{-i\pi h}}{i \prod_{m=1}^p (\tau_m + i\pi h)} \sum_{k=0}^p \gamma_k(p) \sum_{s=0}^{p-k-1} (i\pi h)^s (-1)^{k+s} (q+p-k-s-1)! \right), \quad (24)$$

а $L_q(h)$ определено в теореме 1.

Доказательство. Имеем

$$\prod_{k=1}^p (1 + \theta_k e^{i\pi x}) = \prod_{k=1}^p \left(1 + \left(1 - \frac{\tau_k}{N} \right) e^{i\pi(1-[h/N])} \right) = \frac{1}{N^p} \prod_{k=1}^p (\tau_k + i\pi h + O(N^{-1})), \quad N \rightarrow \infty.$$

Отсюда, из леммы 2 и из (6) имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^q R_{p,N}^+(\theta, f) \left(1 - \frac{h}{N} \right) =$$

$$= A_q(f) \frac{(-1)^{p+1}}{2(i\pi)^{q+1} q! \prod_{m=1}^p (\tau_m + i\pi h)} \int_1^\infty \frac{e^{-i\pi h x}}{x^{q+1}} dx \sum_{k=0}^p (q+p-k)! (-1)^k \gamma_k(p).$$

Остается упростить полученную оценку, проинтегрировав по частям, и заметить, что

аналогичные выкладки имеют место и для $R_{p,N}^-(\theta, f)$.

Сравнение теорем 2 и 3 показывает, что равномерная ошибка на отрезке $[-1, 1]$ полностью определяется предельной величиной

$$l_{q,p} = \max_{h \geq 0} |L_{q,p}(h)|. \quad (25)$$

4. Численная оптимизация В настоящем пункте равномерная ошибка $l_{q,p}$ минимизируется соответствующим выбором параметров τ_k , $k = 1, \dots, p$. Здесь эта задача решается для $p = 1, 2$. Вычисления реализованы применением пакета MATHEMATICA 5 [7]. Строго говоря, найденные значения параметров могут и не являться наилучшими из возможных, однако условимся называть их "оптимальными".

Сначала рассмотрим случай $p = 1$. Элементарные вычисления показывают, что

$$L_{q,1}(h) = L_q(h) - \frac{\tau_1 \sin \pi \left(h + \frac{q}{2} \right) + h \cos \pi \left(h + \frac{q}{2} \right)}{\pi^{q+1} (\tau_1^2 + \pi^2 h^2)}. \quad (26)$$

Оптимальные значения параметра τ_1 , полученные численной минимизацией величины $L_{q,1}$, представлены в табл. 1. Отношение $l_q/l_{q,1}$ показывает, насколько аппроксимация $S_{p,N}(\theta, f)$ с оптимальным выбором параметра τ_1 эффективней, чем отрезок ряда Фурье $S_N(f)$. Как видим, уже при $q = 3$ имеем разницу на порядок, в пользу оптимального выбора.

Таблица 2

Значения констант $l_{q,1}$, $l_q/l_{q,1}$ (см. табл. 1)
для различных значений q , при оптимальном выборе параметра τ_1

q	1	2	3	4	5
$l_{q,1}$	0.01525	0.00153	0.00026	0.00005	0.00001
$l_q/l_{q,1}$	6.6	8	13.1	14.7	18.8
τ_1	1.17728	2.23568	3.24768	4.26805	5.27982

Пусть теперь $p = 2$. В этом случае

$$L_{q,2}(h) = L_{q,1}(h) + \frac{(1 - \tau_1 + q) \left((\tau_1 + \tau_2) h \pi \cos \pi \left(h + \frac{q}{2} \right) + (\tau_1 \tau_2 - h^2 \pi^2) \sin \pi \left(h + \frac{q}{2} \right) \right)}{\pi^{q+1} (\tau_1^2 + \pi^2 h^2) (\tau_2^2 + \pi^2 h^2)}. \quad (27)$$

Оптимальные значения параметров τ_1, τ_2 и соответствующие результаты представлены в табл. 2. Здесь разница между аппроксимациями $S_{p,N}(\theta, f)$ и $S_N(f)$ уже достигает двух порядков. Заметим, что в этом случае минимизируется функция трех переменных (h, τ_1, τ_2) , что связано со значительными вычислительными трудностями. Случаи $p \geq 3$, видимо, должны изучаться на более мощных вычислительных системах, чем современные ПК.

Таблица 3

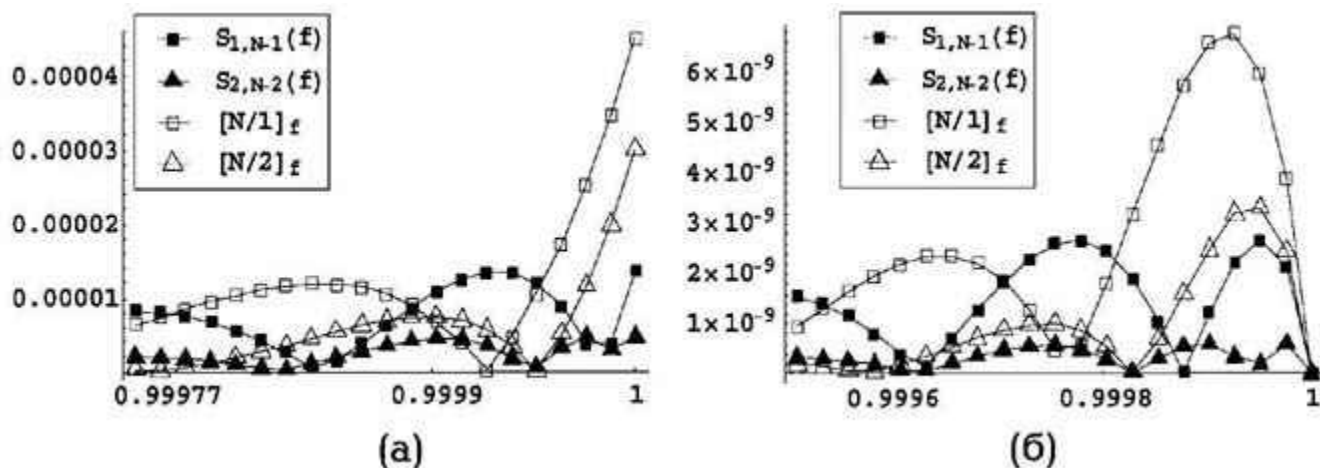
Значения констант $I_{q,2}, I_q/I_{q,2}$ для различных значений q ,
при оптимальном выборе параметров τ_1 и τ_2

q	1	2	3	4
$I_{q,2}$	0.0054	0.0003	0.00026	$7 \cdot 10^{-6}$
$I_q/I_{q,2}$	18.8	36.2	77.6	112.2
τ_1	2.648	4.009	5.305	6.303
τ_2	0.430	1.058	1.750	2.337

Интересно сравнить предлагаемую аппроксимацию $S_{p,N}(\theta, f)$ с аппроксимацией Фурье - Паде. На рисунке представлены графики ошибок при аппроксимации двух функций: $(1 - x^2) \sin(x - 1)$ (а) и $(1 - x^2)^2 \sin(x - 1)$ (б) при $N = 2048$. Здесь сравниваются аппроксимации $S_{p,N}(\theta, f), p = 1, 2$ с "оптимальным" выбором параметров (см. табл. 1, 2) и аппроксимации Паде $[N/p]_p, p = 1, 2$. Как видно из рисунка, и здесь сравнение в пользу аппроксимации $S_{p,N}(\theta, f)$. Уместно заметить, что аппроксимация Фурье - Паде связана с решением системы (7), которая, как правило, плохо обусловлена, особенно при больших N и p . Кроме того, это нелинейная аппроксимация, в отличие от предложенной нами.

5. Заключение. Представленные теоретические и численные результаты показывают, что аппроксимации $S_{p,N}(\theta, f)$ при оптимальном выборе параметров $\{\tau_k\}$ более эффективны, по сравнению как с частными суммами ряда Фурье, так и с аппроксимациями Фурье - Паде. Эта

разница тем больше, чем больше q . Поэтому, если для аппроксимируемой функции $A_0(f) \neq 0$, то на практике желательно воспользоваться хорошо известной схемой применения полиномов Бернулли (см. введение) и только после этого использовать предложенную схему при $q \geq 5$.



Графики ошибок при аппроксимации функций $(1 - x^2)\sin(x - 1)$ (а) и $(1 - x^2)^2 \sin(x - 1)$ (б) при $N = 2048$.

Работа выполнена в рамках проекта ISTC A-823.

Институт математики НАН РА

Литература

1. Zygmund A. - Trigonometric Series. 1959. V. 1,2. Cambridge Univ. Press.
2. Крылов А. Лекции по приближенным вычислениям, Изд-во АН СССР. Л. 1933.
3. Eckhoff K. S. - Math. of Computation. 1998. V. 67. N 223. P. 1363-1387.
4. Gottlieb D., Shu C. W. - Numer. Math. 1996. V. 33. P. 280-290.
5. Baker G. A., Graves-Morris P. - Pade Approximants, Encyclopedia of mathematics and its applications. 1996. V. 59., 2nd ed., Cambridge Univ. Press., Cambridge.
6. Geer J. - ICASE report NO1995. 93-68; J.Sci. Comp. V. 10(3). P. 325-356.
7. Wolfram S. The MATHEMATICA book. Fourth Edition, Wolfram Media, Cambridge University Press. 1999.
8. Vallee-Poussin Ch. J. de la - Bull. Acad. Roy, Belgique. 1908. P. 319-410.
9. Нерсисян А. Б. Оганесян Н. В. - Изв. НАН Армении. Математика. 2002. Т. 37. N. 5. с.48-62.

Ակադեմիկոս Հ. Բ. Ներսիսյան, Ա. Վ. Պողոսյան

Վերջավոր հատվածի վրա մի գծային ռացիոնալ մոտարկման մասին

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է հատվածի վրա ողորկ, բայց ոչ պարբերական ֆունկցիայի գծային մոտարկում՝ ռացիոնալ ֆունկցիաներով: Լուծվել է օպտիմիզացիայի խնդիր: Ցույց է տրվել, որ մոտարկման պարամետրերի համապատասխան ընտրության դեպքում՝ մոտարկման հավասարաչափ սխալը շատ ավելի փոքր է, քան Ֆուրիեի մասնակի գումարներով կամ Ֆուրիե-Պադե մոտարկումով աշխատելիս: Ներկայացված են թվային փորձի արդյունքները: