ФИЗИКА

УДК 539.016

А. М. Ишханян

Вероятность перехода Ландау - Зинера при фотоассоциации бозе-эйнштейновского конденсата в пределе слабого взаимодействия

(Представлено академиком Р.А. Казаряном 23/X 2003)

1. Система полуклассических нелинейных уравнений, описывающих двухмодовую фотоассоциацию [1] атомарного бозе-эйнштейновского конденсата [2], имеет вид

$$i\,\frac{da_1}{dt}=U(t)e^{-i\delta(t)}\,\overline{a_1}a_2,\quad i\,\frac{da_2}{dt}=\frac{U(t)}{2}e^{i\delta(t)}a_1a_2, \tag{1}$$

где a_1 и a_2 - амплитуды, соответственно, атомарного и молекулярного состояний, $U = U(t)$ - частота Раби, а $\delta = \delta(t)$ - функция модуляции расстройки. Это довольно общие уравнения, возникающие во всех полевых теориях, оперирующих кубической нелинейностью (см., например, [3]). Тем не менее, система крайне мало изучена. Точные аналитические решения известны только для простейшей задачи Раби: $U = U_0 = \text{const}$, $\delta_t = \delta_0 = \text{const}$, и небольшого количества специфических моделей, полученных совсем недавно [4], которые, однако, имеют довольно ограниченное применение.

Во всех же физически интересных случаях с переменными функциями модуляции расстройки и/или частотами Раби приходится обращаться к приближенным методам. Однако здесь мы наталкиваемся на трудности, связанные с расходимостью получающихся поправочных членов. Можно попытаться преодолеть эту трудность, переходя к уравнению, содержащему лишь вероятность. В случае модели Ландау - Зинера $U = U_0 = \text{const}$; $\delta = \delta_0 t^2$ [5,6] интересующее нас уравнение для молекулярного состояния имеет вид [7]

$$p''' - \frac{p''}{t} + 4[t^2 + \lambda(1-3p)]p' + \frac{\lambda}{2t}(1-8p+12p^2) = 0, \tag{2}$$

где $\lambda = U^2_0/\delta_0$ - параметр Ландау - Зинера. Однако, как показывает проверка, проблема с расходимостью по-прежнему остается. Это означает, что следует, вообще говоря, обратиться к иным - нетривиальным - методам возмущений, таким, как, например, усреднение Крылова - Боголюбова - Митропольского или метод многих масштабов [8], которые зарекомендовали себя как в высшей степени успешные при решении большого числа задач во многих областях физики и математики. Подобный подход был нами применен в [7], но следует отметить, что этот способ довольно сложный из-за того, что при этом приходится привлекать высшие трансцендентные функции [9], поскольку уравнение (2) третьего порядка.

Тем не менее, предложенные в работе [7] выражения для конечной вероятности перехода стимулируют поиск альтернативных подходов. По крайней мере, в пределе малых интенсивностей внешнего поля, $\lambda << 1$, когда нелинейный член представляет собой слабое регулярное возмущение [8], подобный поиск представляется вполне обоснованным. Руководствуясь этими соображениями, в предыдущей работе [10] мы вывели некоторое нелинейное интегральное уравнение Вольтерра [11], эквивалентное уравнению (2), которое позволяет избавиться от упомянутой расходимости и построить окончательное решение в виде сходящегося ряда для случая малых λ. Примечательно, что такое преобразование возможно для всех моделей с постоянной амплитудой поля. Здесь следует отметить еще и то важное обстоятельство, что решения системы (1) образуют классы [12]. Благодаря этому число принципиально различных моделей сокращается до небольшого количества базовых моделей. Рассматриваемая в настоящей работе модель Ландау - Зинера является одной из таких основных моделей.

Следовательно, общее заключение таково, что развитый в работе [10] подход может служить общей стратегией при решении аналогичных нелинейных двухуровневых задач. В настоящей работе мы демонстрируем эффективность данного подхода выводом простой формулы для первого поправочного члена к нулевому приближению и расчетом конечной (на бесконечности) вероятности перехода в молекулярное состояние для малых значений параметра Ландау - Зинера.

2. Нелинейное интегральное уравнение Вольтерра второго рода [11], предложенное в работе [10], можно записать в виде

$$p(t) = \frac{\lambda}{4} f(t) - 4\lambda \int_{-\infty}^{t} K(t,x) \left(p(x) - \frac{3}{2} p^2(x) \right) dx, \tag{3}$$

где ядро $K(t,x)$ задается формулой

$$K(t,x) = (C_\delta(t) - C_\delta(x))\cos(\delta(x)) + (S_\delta(t) - S_\delta(x))\sin(\delta(x)), \tag{4}$$

а *вынуждающая* функция $f(t)$ [11] имеет вид

$$f(t) = C_\delta^{\,2}(t) + S^2{}_\delta(t), \quad C_\delta(t) = \int_{-\infty}^{t} \cos(\delta(x))dx, \quad S_\delta(t) = \int_{-\infty}^{t} \sin(\delta(x))dx. \tag{5}$$

Если теперь функции $f(t)$ и $K(t,x)$ ограничены, то *последовательные приближения Пикара*

$$p_0 = \frac{\lambda}{4} f(t), \quad p_n = \frac{\lambda}{4} f(t) - 4\lambda \int_{-\infty}^{t} K(t,x) \left(p_{n-1} - \frac{3}{2} p_{n-1}{}^2 \right) dx \tag{6}$$

равномерно сходятся к предельной функции p(t), которая и является единственным решением уравнения (3).

Для модели Ландау - Зинера функции $C_\delta(t)$ и $S_\delta(t)$ принимают вид

$$C_\delta(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2\delta_0}}\left(\frac{1}{2} + C\left(\sqrt{\frac{2\delta_0}{\pi}}\,t\right)\right), \quad S_\delta(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2\delta_0}}\left(\frac{1}{2} + S\left(\sqrt{\frac{2\delta_0}{\pi}}\,t\right)\right), \tag{7}$$

где C и S являются функциями Френеля [9], определяемыми как

$$C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2}\xi^2\right)d\xi, \quad S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2}\xi^2\right)d\xi. \tag{8}$$

Интересно, что вынуждающая функция уравнения Вольтерра при этом превращается в знаменитую функцию из теории дифракции света:

$$f(t) = \frac{\pi}{2\delta_0}\left\{\left[\frac{1}{2} + C\left(\sqrt{\frac{2\delta_0}{\pi}}\,t\right)\right]^2 + \left[\frac{1}{2} + S\left(\sqrt{\frac{2\delta_0}{\pi}}\,t\right)\right]^2\right\}. \tag{9}$$

Как хорошо известно, эта функция задает интенсивность света за полубесконечной непрозрачной стенкой, при этом t играет роль бокового расстояния от края стенки [13].

Как было отмечено в работе [10], последовательные приближения Пикара (6) с вынуждающей функцией (9) представляют собой чересчур медленно сходящую процедуру. Это легко понять, заметив, что нулевой член разложения (6) $p_0 = \lambda f(t)/4 \to \lambda\pi/4$ при $t \to +\infty$, так что начиная уже с $\lambda \approx 0.65$ p_0 превышает максимальное значение 1/2, допускаемое нормировкой. Нетрудно показать, что и следующее приближение страдает подобным недостатком: оно становится отрицательным при $\lambda > 0.65$.

С целью улучшения сходимости предпочтительнее предварительно применить к интегральному уравнению (3) подстановку $p = p_L + u$, где p_L - решение линейного интегрального уравнения $p_L = p_{LZ}(t)/4$. Записываемое часто [6] в функциях параболического цилиндра [9] решение линейной задачи Ландау - Зинера [5] удобнее всего может быть выражено через вырожденную гипергеометрическую функцию Куммера следующим образом:

$$a_{2LZ}(t) = C_1F_1 + C_2F_2, \quad F_1 = {}_1F_1(i\lambda/4; 1/2/i\delta_0 t^2),$$

$$F_2 = t \cdot {}_1F_1(1/2 + i\lambda/4;\ 3/2;\ i\delta_0 t^2), \tag{10}$$

$$C_1 = \sqrt{\lambda e^{-\pi\lambda/4}\cosh\pi\lambda/4}\ \frac{i}{2}\ \frac{\Gamma(1/2-i\lambda/4)}{\Gamma(1-i\lambda/4)},$$

$$C_2 = \sqrt{\lambda e^{-\pi\lambda/4}\cosh(\pi\lambda/4)} \cdot \sqrt{i\delta_0}, \tag{11}$$

где Γ- гамма-функция Эйлера. При $t = +\infty$ мы имеем хорошо известный результат Ландау - Зинера

$$P_{LZ} = 1 - e^{-\pi\lambda}. \tag{12}$$

В результате мы приходим к новому уравнению Вольтерра хаммерштейновского типа [11]

$$u = 6\lambda \int_{-\infty}^{t} K(t,x) p_L^2 dx - 4\lambda \int_{-\infty}^{t} K(t,x)[(1 - 3p_L)u - \frac{3}{2} u^2] dx \tag{13}$$

с видоизмененной вынуждающей функцией, которая теперь порядка λ^3. Очевидно, что эта вынуждающая функция обеспечивает намного более быстрое схождение аппроксимаций. Таким путем удается установить, что решение нелинейной задачи Ландау - Зинера в режиме слабого взаимодействия в первом приближении записывается в виде [10]

$$p(t) = \frac{p_{LZ}(t)}{4} + 6\lambda \int_{-\infty}^{t} K(t,x) \left(\frac{p_{LZ}(x)}{4} \right)^2 dx. \tag{14}$$

Как показывает численный расчет, это очень хорошее приближение. Вплоть до $\lambda < 0.5$ при сравнении с численным решением системы (1) имеет место практическая неразличимость графиков.

Примечательно также, что формула (14) позволяет вычислить конечную (в пределе $t \to +\infty$) вероятность перехода в молекулярное состояние аналитически. Действительно, ведущий член в формуле (13) дает (далее будем полагать $\delta_0 = 1$)

$$u(+\infty) \approx 6\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} - C_\delta(x) \right) \cos\delta(x) - \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} - S_\delta(x) \right) \sin\delta(x) \right] p^2{}_L dx. \tag{15}$$

Поскольку поправка u(t) - порядка λ^3, предварительную оценку можно получить посредством замены p_L на $p_0 = \lambda f(t)/4$. В этом случае легко получается, что на бесконечности

$$p(+\infty) = p_L(+\infty) + \lambda^3 \left(-\frac{\pi^3}{16} + \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, I_G \right),$$

(16)

$$I_G = \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos(x^2) + \sin(x^2))(C_\delta{}^2(x) + S_\delta{}^2(x) + S_\delta{}^2(x))^2 dx.$$

Приближенное аналитическое вычисление интеграла приводит к $I_G \approx [(\pi^2)/6] \sqrt{\{[(\pi)/2]\}}\,(2 + 0.9190) = 6.0179$, что находится в неплохом согласии с численным результатом $I_G = 5.8412$. Таким образом, имеем оценку

$$p(+\infty) = \frac{P_{LZ}}{4} + u(+\infty) \approx \frac{P_{LZ}}{4} + \frac{0.919\pi^3}{32} \lambda^3. \tag{17}$$

В качестве начального приближения это выражение хорошо подтверждает формулу

$$p(+\infty) \approx \frac{P_{LZ}(\lambda)}{4} \left(1 + \frac{\lambda}{\pi} P_{LZ}(\lambda) \right). \tag{18}$$

Действительно, данная формула приводит к

$$p(+\infty) = \frac{P_{LZ}}{4} + \frac{\pi}{4} \lambda^3 + O(\lambda^4). \tag{19}$$

Так что разница мала уже в этом приближении: $0.919\pi^3/32 - \pi/4 \approx 0.1$.

Однако результат можно существенно улучшить. Это можно сделать, заметив, что линейное решение p_L, присутствующее в подынтегральном выражении (13), хорошо аппроксимируется формулой вида

$$p_L(t) \approx \frac{P_{LZ}}{4} f_L(t), \tag{20}$$

где функция $f_L(t)$ не зависит от λ. Вид этой функции можно установить из уравнения (2) следующим образом. Подставив в уравнение $p = P_{final} f_L(t)$, где P_{final} является конечной вероятностью перехода при $t \to +\infty$, и далее разделив его на P_{final}, можно получить

$$f'''_L - \frac{f''_L}{t} + [4t^2 + 4\lambda(1 - 3P_{final} f_L)]f'_L + \frac{\lambda}{2t}\left(\frac{1}{P_{final}} - 8f_L + 12\frac{P_{final}}{4} f^2_L\right) = 0. \tag{21}$$

Теперь для вывода уравнения для предельной функции $f_L(t)$ надо взять предел $\lambda \to 0$, помня при этом, что $\lambda/P_{final} \approx \lambda/(P_{LZ}/4) = 4\lambda/(1 - e^{-\pi\lambda}) \to 4/\pi$:

$$f'''_L - \frac{f''_L}{t} + 4t^2 f'_L + \frac{2}{\pi t} = 0. \tag{22}$$

Частным решением этого уравнения, удовлетворяющим рассматриваемым здесь начальным условиям, является

$$f_L(t) = -\frac{1}{4} + \frac{4(C_\delta + S_\delta)}{\pi^2} + \frac{t^2}{2\pi}\left[{}_2F_2(1,1;\, 3/2,2;\, +it^2) + {}_2F_2(1,1;\, 3/2,2;\, -it^2)\right]. \tag{23}$$

Подстановка этой функции в уравнение (14) теперь дает

$$p(+\infty) = \frac{P_{LZ}}{4} + \lambda\left(\frac{P_{LZ}}{4}\right)^2 I, \tag{24}$$

где

$$I = 6\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} - C_\delta(x)\right)\cos\delta(x) - \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} - S_\delta(x)\right)\sin\delta(x)\right] f^2_L(x)\,dx. \tag{25}$$

Изучение подынтегрального выражения (25) показывает, что оно эффективно отличается от нуля только в малом интервале в окрестности начала координат. Хотя здесь возможно прямое аналитическое рассмотрение, скажем, с помощью разложения в ряд, однако, учитывая, что этот интеграл - всего лишь число, его просто можно рассчитать численно. В результате получается значение $I = 1.3317 \approx 4/3$. Непосредственное использование самого линейного решения Ландау - Зинера улучшает результат, давая I = 1.3082, который должен заменить I в (24), тем самым подтверждая значение $I = 4/\pi \approx 1.2732$, даваемое формулой (18). Выведенная формула (24) с последним числом хорошо согласуется с численным решением: относительная ошибка вплоть до $\lambda \approx 0.4$ остается меньше 10^{-3}.

Таким образом, мы изучили нелинейную задачу Ландау - Зинера для фотоассоциации атомарного бозе-эйнштейновского конденсата. Применив нелинейное уравнение Вольтерра, мы вывели приближенное выражение для конечной вероятности перехода в молекулярное состояние для случая слабого взаимодействия - формулу (18). Поскольку рассмотренная здесь модель нелинейной двухуровневой задачи является типовой для классических и бозонных теорий поля с кубической нелинейностью, полученная формула может служить новой парадигмой для нелинейных квантовых задач пересечения термов.

Работа выполнена при поддержке грантов Фонда Гражданских Исследований и Разработок США (CRDF) No. NFSAT PH 100-02/12042.

Инженерный центр НАН РА

Литература

1. *Javanainen J., Mackie J.* - Phys. Rev.A. 1999. V. 59. P. R3186; Kosatrun M., Mackie M., Cote R., Javanainen J. - Phys. Rev.A. 2000. V. 62. P. 063616.

2. *Anderson M.H., Ensher J.R., Matthews M.R., Wieman C.E., Cornell E.A.* Science. 1995. V. 269. P.198; Anglin J.R., Ketterle W. - Nature (London). 2002. V. 416. P. 211.

3. *Timmermans E., Tommasini P., Hussein M., Kernan A.* - Phys.Rep.C. 1999. V. 315. P. 199; Shen Y.R. The Principles of Nonlinear Optics, N. Y. Wiley. 2002.

4. *Ishkhanyan A.M., Mackie M., Gould Ph., Javanainen J.* In: Interactions in Ultracold Gases: From Atoms to Molecules (Eds. M. Weidemuller and C. Zimmerman). Berlin. Wiley. 2003.

5. *Landau L.D.* - Phys. Z. Sowjetunion. 1932. V. 2. P. 46; Zener C. - Proc. R. Soc. London A.1932. V. 137. P. 696.

6. *B.W. Shore.* The Theory of Coherent Atomic Excitation. N. Y. Wiley. 1990.

7. *Ishkhanyan A.M., Mackie M., Carmichael A., Gould Ph., Javanainen J.* - Phys. Rev. A. 2004. V. 69.

8. *Nayfeh A.H.* Perturbation Methods. N. Y. Wiley-Interscience. 1985.

9. *Abramowitz M., Stegun I.A.* Handbook of Mathematical Functions. N. Y. Dover. 1965.

10. *Ishkhanyan A.M., Chernikov G.P.* - J. Contemp. Physics (Armenian Nat'l Ac. Sci.). 2004. V. 39(1). P.1.

11. *Tricomi F.G.* Integral Equations. N. Y. Dover Publications. 1985; Miller R.K. Nonlinear Volterra Integral Equations. N. Y. Benjamin. 1971.

12. *Ishkhanyan A.M.* - J. Phys. A. 2000. V. 33. P. 5539; Ishkhanyan A.M. - Opt. Commun. 2000.V. 176. P. 155.

13. *Sommerfeld A.* - Math. Ann. 1896. V. 47. P. 317; Born M., Wolf E. Principles of Optics. Cambridge. Cambridge University Press. 1999.

Ա.Մ. Իշխանյան

Լանդաու - Զեների անցման հավանականությունը բոզե-Էյնշտեյնյան կոնդենսատի ֆոտոասոցիացիայի համար թույլ փոխազդեցության սահմանում

Ուսումնասիրված է Լանդաու - Զեների ոչգծային կիսադասական խնդիրը ատոմական բոզե-Էյնշտեյնյան կոնդենսատի երկմոդ ֆոտոասոցիացիայի համար: Վոլտերրայի ոչգծային մի ինտեգրալ հավասարման կիրառմամբ ստացված է մոլեկուլային վիճակի անցման հավանականության առաջին մոտավորությունը և գտնված է անցման վերջնական հավանականության մոտավոր բանաձև թույլ փոխազդեցության դեպքի համար: