УДК 62.50

М.С. Габриелян, В.Р. Барсегян

О приоритете выбора сигналов в задаче оптимального наблюдения

(Представлено академиком Ю.Г. Шукуряном 11/XII 2003)

Рассматривается задача оптимального наблюдения линейных систем при наличии нескольких различных сигналов.

1. Пусть имеется система

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{1.1}$$

где $x \in R^n$, $A(t)$ – $(n \times n)$ матрицы с измеримыми и ограниченными элементами на промежутке $t \in [t_0, T]$.

Пусть имеется возможность на промежутке времени $[t - \vartheta, t]$, где $\vartheta > 0$, измерять величины

$$\bar{y}^{(i)}(\tau) = \bar{G}_i(\tau)x(\tau) \qquad (i = 1,\ldots,k), \tag{1.2}$$

где $\bar{y}^{(i)}(\tau)$ - $(m_i \times 1)$-мерная, а $\bar{G}_i(\tau)$ - $(m_i \times n)$-мерная матрица, элементы которых кусочно-непрерывные функции при $\tau \in [t - \vartheta, t]$. Обозначим через $m = \max\{m_1,\ldots,m_k\}$.

Сигналы $\bar{y}^{(i)}(\tau)$ и матрицы $\bar{G}_i(\tau)$ $(i = 1,\ldots,k)$ дополним на отрезке $\tau \in [t - \vartheta, t]$ нулями до размерности $(m \times n)$ [1] и обозначим их соответственно через $y^{(i)}(\tau)$ и $G_i(\tau)$.

Пусть $\alpha_i \in [0,1]$ $(i = 1,\ldots,k)$ независимые параметры. Рассмотрим процесс наблюдения системы (1.1) при сигнале

$$y(\tau, \alpha_1,\ldots,\alpha_k) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i y^{(i)}(\tau) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i G_i(\tau)x(\tau)$$

или

$$y(\tau, \alpha_1,\ldots,\alpha_k) = G(\tau, \alpha_1,\ldots,\alpha_k)x(\tau), \text{ где } G(\tau, \alpha_1,\ldots,\alpha_k) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i G_i(\tau). \tag{1.3}$$

Требуется определить оптимальные линейные операции, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\varphi_j[t, y(\tau, \alpha_1,\ldots,\alpha_k)] = x_j(t) \qquad (j = 1,\ldots,n).$$

Целесообразно указанные линейные операции искать в следующей матричной форме:

$$\int\limits_{t-\vartheta}^{t} V(t, \tau; \cdot)y(\tau, \alpha_1,\ldots,\alpha_k)d\tau = x(t).$$

Здесь матрица $V(t, \tau; \cdot)$ имеет размерность $(n \times m)$. Формула Коши для решения системы (1.1) будет

$$x(\tau) = X[\tau,t]x(t), \tag{1.4}$$

где $X[\tau,t]$ - нормированная фундаментальная матрица системы (1.1). Подставляя значение $x(\tau)$ из (1.4) в (1.3), получим

$$\int\limits_{t-\vartheta}^{t} V(t, \tau; \cdot)G(\tau, \alpha_1,\ldots,\alpha_k)X[\tau,t]x(t)d\tau = x(t). \tag{1.5}$$

Так как вектор $x(t)$ может принимать любое значение из R^n, то из (1.5) следует, что

$$\int\limits_{t-\vartheta}^{t} V(t, \tau; \cdot)G(\tau, \alpha_1,\ldots,\alpha_k)X[\tau,t]d\tau = E, \tag{1.6}$$

где E единичная матрица.

Матричную функцию $V(t, \tau; \cdot)$, удовлетворяющую условию (1.6), можно определить при помощи проблемы моментов при минимизации соответствующего функционала:

а) при минимизации функционала

$$\left(\int\limits_{t-\vartheta}^{t} V^2(t, \tau; \cdot)d\tau \right)^{[1/2]} \tag{1.7}$$

с условиями (1.6) определение оптимального фильтра можно привести к изопериметрической задаче [2];

б) при минимизации функционала

$$\sup_{t-\vartheta \le \tau \le t} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |V_{ij}(t, \tau; \cdot)|$$

с условиями (1.6) оптимальный фильтр можно определить при помощи проблемы моментов [2] и т.д.

Таким образом, когда минимизируемый функционал удовлетворяет условиям нормы, решение первого этапа поставленной задачи приводится к проблеме моментов.

Решая сформулированные задачи при различных критериях, получаем минимальную величину нормы фильтра

$$\rho^*[\varphi(\cdot; \alpha_1,\dots,\alpha_k)] = f(\alpha_1,\dots,\alpha_k),$$

зависимую от параметров $\alpha_1,\dots,\alpha_k$.

Эта величина непрерывно зависит от указанных параметров. Так как $\alpha_i \in [0,1]$, то минимум нормы $\rho^*[\varphi(\cdot;\alpha_1,\dots,\alpha_k)]$ по $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ достижим.

При норме (1.7) ρ_0^2 является квадратичной формой, зависимой от $\alpha_1,\dots,\alpha_k$. Следует заметить, что если $\rho_0 > 0$, а система (1.1) и сигналы (1.2) стационарные, то получим условие вполне наблюдаемости [2,3].

Замечание. Те значения параметров системы α_i $(i = 1,\dots,k)$, при которых норма указанного фильтра неограниченна (норма сопряженного пространства $\rho_0 = 0$), не рассматриваются, так как в этих случаях система не является вполне наблюдаемой.

2. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \ \dot{x}_2 = -x_1. \tag{2.1}$$

Пусть поступают сигналы

$$\bar{y}^{(1)}(\tau) = g_1 x_1(\tau), \quad \bar{y}^{(2)}(\tau) = g_2 x_2(\tau), \quad \bar{y}^{(3)}(\tau) = g_{11} x_1(\tau) + g_{22} x_2(\tau),$$

где $g_i = \text{const}$, $g_{ii} = \text{const}$, $(i = 1,2)$.

Нормированная фундаментальная матрица системы (2.1) имеет вид

$$X[\tau,t] = \begin{pmatrix} \cos(\tau - t) & \sin(\tau - t) \\ -\sin(\tau - t) & \cos(\tau - t) \end{pmatrix}.$$

Интегральные условия (1.6) для данной задачи будут:

$$\begin{gathered} \int\limits_{-\vartheta}^{0} (a_1\cos\zeta - a_2\sin\zeta)V_1(\zeta, \cdot)d\zeta = 1, \quad \int\limits_{-\vartheta}^{0} (a_2\cos\zeta + a_1\sin\zeta)V_1(\zeta, \cdot)d\zeta = 0, \\ \int\limits_{-\vartheta}^{0} (a_1\cos\zeta - a_2\sin\zeta)V_2(\zeta, \cdot)d\zeta = 0, \quad \int\limits_{-\vartheta}^{0} (a_2\cos\zeta + a_1\sin\zeta)V_2(\zeta, \cdot)d\zeta = 1, \end{gathered} \tag{2.2}$$

где приняты следующие обозначения:

$$a_1 = \alpha_1 g_1 + \alpha_3 g_{11}, \quad a_2 = \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_{22}, \quad \alpha_i \in [0,1]\ (i = 1,2,3),$$

$$\tau - t = \zeta, \quad \overline{V}_j(t, t + \zeta, \cdot) = V_j(\zeta, \cdot)\ (j = 1,2).$$

Найдем функции $V_1(\zeta,\cdot)$ и $V_2(\zeta,\cdot)$, удовлетворяющие интегральным условиям (2.2) и являющиеся оптимальными в смысле

$$\int\limits_{-\vartheta}^{0} [V_1^2(\zeta, \cdot) + V_2^2(\zeta, \cdot)]d\zeta \to \min . \tag{2.3}$$

Следуя [2], нужно найти числа l_1,l_2,l_3,l_4, связанные условием

$$l_1 + l_4 = 1, \tag{2.4}$$

которые минимизируют квадрат нормы основного пространства

$$\rho_0^2 = \min_{l_1+l_4=1} \int\limits_{-\vartheta}^{0} [h_1^2(\zeta) + h_2^2(\zeta)]d\zeta, \tag{2.5}$$

где

$$\begin{gathered} h_1(\zeta) = l_1(a_1\cos\zeta - a_2\sin\zeta) + l_2(a_2\cos\zeta + a_1\sin\zeta), \\ h_2(\zeta) = l_3(a_1\cos\zeta - a_2\sin\zeta) + l_4(a_2\cos\zeta + a_1\sin\zeta). \end{gathered} \tag{2.6}$$

Подставляя (2.6) в (2.5), проведя некоторые вычисления и применяя метод неопределенных множителей Лагранжа для нахождения l_1^0, l_2^0, l_3^0 и l_4^0, получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$
\begin{aligned}
&(a_1^2\sigma_1 + a_2^2\sigma_2 - 2a_1a_2\sigma_3)l_1 + [a_1a_2(\sigma_1 - \sigma_2) + (a_1^2 - a_2^2)\sigma_3]l_2 = -\lambda,\\
&[a_1a_2(\sigma_1 - \sigma_2) + (a_1^2 - a_2^2)\sigma_3]l_1 + (a_2^2\sigma_1 + a_1^2\sigma_2 + 2a_1a_2\sigma_3)l_2 = 0,\\
&(a_1^2\sigma_1 + a_2^2\sigma_2 - 2a_1a_2\sigma_3)l_3 + [a_1a_2(\sigma_1 - \sigma_2) + (a_1^2 - a_2^2)\sigma_3]l_4 = 0,\\
&[a_1a_2(\sigma_1 - \sigma_2) + (a_1^2 - a_2^2)\sigma_3]l_3 + (a_2^2\sigma_1 + a_1^2\sigma_2 + 2a_1a_2\sigma_3)l_4 = -\lambda,
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

где $\sigma_1 = \vartheta + [(\sin 2\vartheta)/2]$, $\sigma_2 = \vartheta - [(\sin 2\vartheta)/2]$, $\sigma_3 = -\sin^2\vartheta$, λ неопределенный множитель.

Решая полученную замкнутую систему (2.7), (2.4), получим

$$
\begin{gathered}
l_1^0 = \frac{a_2^2\sigma_1 + a_1^2\sigma_2 + 2a_1a_2\sigma_3}{(\sigma_1 + \sigma_2)(a_1^2 + a_2^2)}, \qquad l_2^0 = l_3^0 = -\frac{a_1a_2(\sigma_1 - \sigma_2) + (a_1^2 - a_2^2)\sigma_3}{(\sigma_1 + \sigma_2)(a_1^2 + a_2^2)},\\
l_4^0 = \frac{a_2^2\sigma_1 + a_1^2\sigma_2 - 2a_1a_2\sigma_3}{(\sigma_1 + \sigma_2)(a_1^2 + a_2^2)}.
\end{gathered}
\tag{2.8}
$$

Подставляя (2.8) в (2.6), а затем в (2.5), получим

$$
\rho_0^2(\cdot) = \frac{1}{4}(\vartheta^2 - \sin^2\vartheta)(a_1^2 + a_2^2).
$$

Искомые функции $V_i^0(\zeta,\cdot)$ будут:

$$
V_i^0(\zeta, \cdot) = \frac{1}{\rho_0^2(\cdot)} h_i^0(\zeta) \qquad (i = 1,2),
$$

где $h_i^0(\zeta)$ имеют вид (2.6).

Для нормы (2.3) получим

$$
\|V^0(\cdot)\|^2 = \frac{1}{\rho_0^2(\cdot)} = \frac{4}{(\vartheta^2 - \sin^2\vartheta)(a_1^2 + a_2^2)}.
$$

Учитывая обозначения для a_1 и a_2, получаем

$$\|V^0(\cdot)\|^2 = \frac{1}{\rho_0^{\,2}(\cdot)} = \frac{4}{(\vartheta^2 - \sin^2\vartheta)[(\alpha_1 g_1 + \alpha_3 g_{11})^2 + (\alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_{22})^2]} .$$

Следовательно, минимум $\|V^0(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\|$ будет при максимуме выражения

$$F(\cdot) = (\alpha_1 g_1 + \alpha_3 g_{11})^2 + (\alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_{22})^2.$$

Максимизируя функцию $F(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ при $\alpha_i \in [0,1]$ $(i = 1,2,3)$, получим тот сигнал, который в вышеуказанном смысле является оптимальным.

Для определенности предполагая, что $g_1 = g_2 = 1$, $g_{11} < 0$, $g_{22} < 0$, F получит максимальное значение при $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

Ереванский государственный университет

Литература

1. *Габриелян М.С., Барсегян В.Р.* - ДНАН Армении. 2002. Т. 102. N3. С. 219-222.
2. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М. Наука. 1968. 476 с.
3. *Калман Р.Е.* - Труды I конгресса ИФАК. М. АН СССР. 1961. Т. 1. С. 521-547.

Մ. Ս. Գաբրիելյան, Վ. Ռ. Բարսեղյան

Օպտիմալ դիտման խնդրում ազդակների ընտրության առաջնության մասին

Դիտարկված է մի քանի տարբեր ազդակների առկայության դեպքում գծային համակարգերի օպտիմալ դիտման խնդիրը: Ներմուծված են ստացվող ազդակների հզորությունը և կարևորությունը բնութագրող անկախ պարամետրեր: Կառուցված է ներմուծված պարամետրերից կախված բոլոր հնարավոր ազդակներն ընդգրկող համախմբությունը: Ենթադրվում է, որ համակարգը լրիվ դիտելի է ըստ ստացվող ազդակների համախմբության, և, լուծելով օպտիմալ դիտման խնդիրը, այնուհետև մինիմիզացվում է կառուցված օպտիմալ ֆիլտրի նորման ըստ ներմուծված պարամետրերի: