

С. Л. Гогян

О сходимости L^1 -гриди алгоритма по системе Хаара

(Представлено чл.-кор. НАН РА Г.Г. Геворкяном 9/IV 2004)

Пусть $p \geq 1$ и $\varphi = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ замкнутая в $L^p_{[0,1]}$ ортогональная система. Предположим, что для каждой функции $f(x) \in L^p_{[0,1]}$ существуют числа $\hat{\alpha}$ и $\hat{k}$, для которых выполняется равенство

$$\inf_{\alpha, k} \|f - \alpha \varphi_k\|_p = \|f - \hat{\alpha} \varphi_{\hat{k}}\|_p. \quad (1)$$

Отметим, что этот выбор может быть не единственным. Определим последовательности нелинейных операторов $\{G_m(x, f, \varphi, L^p)\}_{m=0}^{\infty}$ и $\{R_m(x, f, \varphi, L^p)\}_{m=0}^{\infty}$ следующим образом:

$$G_0(x, f, \varphi, L^p) = 0, \quad R_0(x, f, \varphi, L^p) = f(x),$$

$$G_1(x, f, \varphi, L^p) = \hat{\alpha} \varphi_{\hat{k}}(x), \text{ где } \hat{\alpha} \text{ и } \hat{k} \text{ определяются из (1),}$$

$$R_1(x, f, \varphi, L^p) = f(x) - G_1(x, f, \varphi, L^p).$$

$$G_{m+1}(x, f, \varphi, L^p) = G_m(x, f, \varphi, L^p) + G_1(x, R_m(x, f, \varphi, L^p), \varphi, L^p),$$

$$R_{m+1}(x, f, \varphi, L^p) = f(x) - G_{m+1}(x, f, \varphi, L^p).$$

Заметим, что последовательности $\{G_m(x, f, \varphi, L^p)\}_{m=0}^{\infty}$ и $\{R_m(x, f, \varphi, L^p)\}_{m=0}^{\infty}$ могут определяться неоднозначно. Последовательность нелинейных операторов $\{G_m(x, f, \varphi, L^p)\}_{m=0}^{\infty}$ называется L^p -гриди алгоритмом функции $f(x)$ по системе φ . Такой алгоритм для банаховых пространств был рассмотрен В. Н. Темляковым [1]. Гриди (жадный) алгоритмы разных типов изучены Р. ДеВором и В. Н. Темляковым [1,2].

Определение 1. Говорят, что L^p -гриди алгоритм функции $f \in L^p[0,1]$ по системе φ сходится к ней, если (некоторая) последовательность $\{G_m(x, f, \varphi, L^p)\}_{m=0}^{\infty}$ сходится к $f(x)$ по $L^p[0,1]$ норме, т. е.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|f - G_m(f, \varphi, L^p)\|_p = 0.$$

В. Н. Темляковым был поставлен вопрос: сходится ли L^p -гриди алгоритм ($p > 1$) по системе Хаара (см. [1], с. 7, 20)? В настоящей работе доказывается, что этот вопрос при $p = 1$ имеет отрицательный ответ.

Напомним определение ортонормированной системы Хаара

$$\chi_0^{(0)}(x) = \chi_0(x) = 1$$

$$\chi_k^{(m)} = \begin{cases} 2^{[(k-1)/2]} & \frac{m-1}{2^{k-1}} < x < \frac{2m-1}{2^k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \\ -2^{[(k-1)/2]} & \frac{2m-1}{2^k} < x < \frac{m}{2^{k-1}}, \quad 1 \leq m \leq 2^{k-1} \\ 0 & \text{для остальных } x. \end{cases}$$

Для системы Хаара справедлива

Теорема 1. Для любой функции $f \in L^1[0,1]$ существуют числа $\hat{\alpha}$, $\hat{k}$ и $\hat{p}$ (вообще говоря, не единственные), для которых справедливо равенство

$$\inf_{\alpha \in \mathbb{R}, k, p} \|f - \alpha \chi_k^{(p)}\|_1 = \|f - \hat{\alpha} \chi_{\hat{k}}^{(\hat{p})}\|_1.$$

Следовательно, можно определить L^1 -гриди алгоритм по системе Хаара. Следует отметить, что не всякие полные ортогональные системы обладают этим свойством. В частности для полной ортонормированной системы $\{\omega_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, построенной М. Г. Григоряном [3], для любой функции $f \in L^1[0,1]$ имеет место

$$\inf_{\alpha, k} \|f - \alpha \omega_k\|_1 = 0.$$

Определение 2. Пусть $f \in L^1[t_1, t_2]$, $g \in L^1[t_1, t_2]$. Если

$$\|f\|_{L^1[t_1, t_2]} - \inf_{\alpha} \|f - \alpha g\|_{L^1[t_1, t_2]} = 0,$$

то скажем, что функция g не может понизить норму f .

Пусть

$$P(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \frac{5}{8}, \quad \frac{3}{4} \leq x < \frac{7}{8}, \\ -1 & \frac{5}{8} \leq x < \frac{3}{4}, \quad \frac{7}{8} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Для каждого натурального r обозначим через Φ_r совокупность всех функций вида

$$\varphi(x) = \begin{cases} P(2^{k+1}x - 1); & \frac{1}{2^{k+1}} \leq x < \frac{1}{2^k} \quad k = r, r+1, \dots \\ 0; & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ g(x); & \text{где } g(x) \text{ неотрицательная, интегрируемая функция на } \left[\frac{1}{2^r}, \frac{1}{2} \right], \\ & \text{с } \text{mes} E\{x; g(x) = 0, x \in [2^{-1-p}, 2^{-p}]\} \geq \frac{3}{2^{p+3}} \quad p = 1, 2, \dots, r-1. \end{cases}$$

Верна

Теорема 2. Для любого $r \in \mathbb{N}$ и для каждой $\varphi \in \Phi_r$, существуют единственные $\hat{k}$, $\hat{p}$ и $\hat{\alpha} \in \mathbb{R}$ такие, что

$$1) \min_{\alpha \in \mathbb{R}} \|\varphi - \alpha \chi_k^{(p)}\|_1 = \|\varphi - \hat{\alpha} \chi_{\hat{k}}^{(\hat{p})}\|_1 = \|\varphi\|_1 - \frac{1}{2^{r+2}};$$

при этом

$$2) R_1(x, \varphi, \chi, L^1) = \varphi(x) - \hat{\alpha} \chi_{\hat{k}(\hat{p})}(x) \in \Phi_{r+1}.$$

Основным средством для доказательства этой теоремы является

Лемма 1. Для любого $r \in \mathbb{N}$ и для каждой $\varphi \in \Phi_r$

- 1) ни одна функция из системы Хаара с верхним индексом 1 не может понизить норму φ ;
- 2) ни одна функция из системы Хаара с нижним индексом меньше $(r+2)$ не может понизить норму φ .

Теорема 3. Существует функция $\varphi \in L^1[0,1]$, для которой

$$\|\varphi - G_n(\varphi, \chi, L^1)\|_1 = \|\varphi\|_1 - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n 2^{-k}.$$

Доказательство. В качестве $\varphi(x)$ возьмем $\varphi(x) \in \Phi_1$. Тем самым функция $\varphi(x)$ определяется однозначно (в Φ_1 содержится одна функция). Согласно теореме 2

$$R_1(x, \varphi, \chi, L^1) = \varphi(x) - \chi_3^{(2)}(x), \|R_1(\varphi, \chi, L^1)\|_1 = \|\varphi\|_1 - \frac{1}{2^3}.$$

Принимая во внимание, что $R_1(x, \varphi, \chi, L^1) \in \Phi_2$, можем к нему применить теорему 2 при $r = 2$.
 n раз применяя теорему 2,

$$R_n(x, \varphi, \chi, L^1) = R_{n-1}(x, \varphi, \chi, L^1) - \chi_{n+2}^{(2)}(x) \in \Phi_{n+1},$$

$$\|R_n(\varphi, \chi, L^1)\|_1 = \|R_{n-1}(\varphi, \chi, L^1)\|_1 - \frac{1}{2^{n+2}} = \dots = \|\varphi\|_1 - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n 2^{-k},$$

то есть

$$\|\varphi - G_n(\varphi, \chi, L^1)\|_1 = \|\varphi\|_1 - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n 2^{-k}.$$

Теорема 3 доказана.

Из этой теоремы вытекает

Теорема 4. *Существует функция $\varphi \in L^1[0,1]$, L^1 -гриды алгоритм которой по системе Хаара расходится.*

В заключение выражаю благодарность профессору М. Г. Григоряну, под руководством которого выполнена эта работа.

Ереванский государственный университет

Литература

1. *Temlyakov V.N.* Nonlinear Methods of Approximation. 2001:09. IMI Preprint Series
2. *DeVore R.A., Temlyakov V.N.* - Computational Math. 1996. N5. P. 173-187.
3. *Григорян М. Г.* - Изв. НАН Армении. Математика. 2000. Т. 35, N4. С. 44-64.

Ս. Լ. Գոգյան

Ըստ Հաարի համակարգի L^1 -գրեղի ալգորիթմի գուգամիտության մասին

Հոդվածում ուսումնասիրված է L^1 -գրեղի ալգորիթմը, երբ ֆունկցիան մոտարկվում է ըստ Հաարի համակարգի: Պարզվել է, որ այդ ալգորիթմը գոյություն ունի L^1 դասի ցանկացած ֆունկցիայի համար: Կառուցված են ֆունկցիաների օժանդակ դասեր, որոնց հատկությունների շնորհիվ կառուցված է ֆունկցիա, որի L^1 -գրեղի ալգորիթմը չի գուգամիտում իրեն ըստ Հաարի համակարգի: