УДК 517.9

А.Р. Хачатрян

О непрерывности некоторых многозначных отображений

(Представлено чл.- кор. НАН РА Г. Г. Геворкяном 13/II 2004)

Непрерывные многозначные отображения естественным образом возникают при изучении вопросов корректности и стабильности в параметризованных задачах оптимизации [1-4]. Известно[1,5], что такие отображения с выпуклыми замкнутыми значениями имеют непрерывные однозначные сечения.

В настоящей работе (при довольно естественных предположениях) показано, что при $\varepsilon > 0$ многозначное отображение $a_\varepsilon(\theta) = \{ x \in a(\theta) / f(x,\theta) \le \inf\limits_{x \in a(\theta)} f(x, \theta) + \varepsilon\}$ множества ε-оптимальных решений [3 ,4] является непрерывным многозначным отображением с выпуклыми образами и поэтому имеет непрерывные сечения. Этот результат является основным инструментом в наших исследованиях.

В работе установлены следующие результаты:

а) Методом проекции градиентов строится функциональная последовательность и при некоторых условиях доказывается, что расстояние этой последовательности до множества $a_\varepsilon(\theta)$ равномерно по θ стремится к нулю.

б) Вводится понятие интеграла Римана для многозначного отображения и показывается, что замыкание интеграла Римана совпадает с интегралом Лебега [6]. Этот результат используется при вычислении ε-субдифференциала целевой функции в стохастическом программировании.

в) В теории непрерывых игр показано, что если множества стратегий игроков являются непрерывными многозначными отображения с выпуклыми образами, то игроки могут использовать только непрерывные решающие правила, которые описывают устойчивое поведение игроков [7].

г) Рассматривается задача Коши для дифференциального включения, зависящего от параметров. При некоторых условиях доказано, что множество решений этой задачи непрерывно зависит от параметров.

д) Показано, что оператор проецирования на выпуклый компакт в банаховом пространстве есть непрерывное многозначное отображение.

1. Введение. Пусть X,Y - метрические пространства. Под многозначным отображением (м.о.) X в Y понимается отображение $a : X \to 2^Y$ пространства X в совокупность всех подмножеств 2^Y пространства Y. Напомним некоторые определения из [8].

Определение 1. *М.о.* $a : X \to 2^Y$ *называется полунепрерывным сверху (п.н.св.) в точке* $x_0 \in X$, *если из того, что* $x_j \to x_0$, $y_j \in a(x_j)$ *и* $y_j \to y_0$, *следует, что* $y_0 \in a(x_0)$.

Определение 2. *М.о.* $a : X \to 2^Y$ *называется полунепрерывным снизу (п.н.сн.) в точке* $x_0 \in X$, *если для любого* $y_0 \in a(x_0)$ *и любой последовательности* $\{x_j\}$, $x_j \to x_0$, *найдутся такие* $y_j \in a(x_j)$, *что* $y_j \to y_0$.

Определение 3. *Отображение* $a : X \to 2^Y$ *называется непрерывным, если оно одновременно полунепрерывно и сверху и снизу в любой точке* $x \in X$.

Определение 4. *Сечение для* $a : X \to 2^Y$ *определяется как однозначное отображение* $y(\cdot) : X \to Y$ *такое, что* $y(x) \in a(x)$ *для всех* $x \in X$.

Теорема 1. *Пусть* $a(\theta)$ *непрерывное м.о. с выпуклыми компактными значениями на компактном множестве* $E \subset R^p$. *Пусть функция* $f(x, \theta)$ *непрерывна по* θ *и выпукла по* $x \in R^n$.

Положим $V_a(\theta) = \min\limits_{x \in a(\theta)} f(x, \theta)$; $a_\varepsilon(\theta) = \{x \in a(\theta)\ /\ f(x,\theta) \le V_a(\theta) + \varepsilon\}$. *Тогда м.о.* $a_\varepsilon(\theta)$ *непрерывно.*

2. Интегралы многозначного отображения. Пусть (E,Σ, P) - вероятностное пространство, где $E \subset R^p$ - компакт.

Определение 5. *Интегралом Римана м.о.* $G : E \to 2^{R^m}$ *называется множество интегралов от всевозможных непрерывных сечений отображения* G:

$$(R) \int_E G(\theta)P(d\theta) =\{ \int_E g(\theta)P(d\theta)/g(\theta) \in G(\theta)\} \equiv I_R.$$

Определение 6[6]. *Интегралом Лебега м.о.* $G : E \to 2^{R^m}$ *называется множество интегралов от всевозможных интегрируемых сечений отображения* G. *Обозначим это множество через* I_L.

Теорема 2. *Пусть м.о.* $G(x,\theta) : R^n \times E \to 2^{R^m}$ *непрерывно; множества* $G(x,\theta)$ - *непустые выпуклые компакты. Пусть* $a(x) \equiv (R) \int_E G(x, \theta)P(d\theta)$. *Тогда м.о.* $a(x)$ *непрерывно.*

Теорема 3. *Пусть м.о.* $G : E \to 2^{R^m}$ *непрерывно и для любого* $\theta \in E$ *множество* $G(\theta)$ *выпукло, замкнуто и компактно. Тогда имеет место равенство* $\bar{I}_R = I_L$, где $\bar{I}_R$ - *замыкание множества* I_R.

Пусть функция $f(x,\theta)$ определена на $R^n \times E$. При $\varepsilon > 0$ определим ε - субдифференциальное отображение по x для функции $f(x,\theta)$ следующим образом:

$$\partial_x^\varepsilon f(x,\theta) \equiv \{ \nu \in R^n / f(y,\theta) - f(x,\theta) \ge < \nu, y - x > -\varepsilon, \forall x \in R^n\}.$$

Рассмотрим теперь задачу стохастического программирования:

$$F(x) \equiv \int_E f(x,\theta)P(d\theta) \to \min ,$$

где $f(x,\theta)$ сильно выпукла по x равномерно относительно $\theta \in E$ и непрерывна по θ при фиксированом $x \in R^n$. Имеет место следующий результат:

Теорема 4. *Пусть* $x_0 \in R^n$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ *такое, что* $\partial F(x_0) + B_\delta(0) \subseteq I_L \subseteq \partial_\varepsilon F(x_0)$, *где* I_L *интеграл Лебега от многозначного отображения* $\partial^\varepsilon{}_x f(x_0,\cdot) : E \to 2^{R^n}$; $B_\varepsilon(0)$ - *замкнутый шар радиуса* ε *с центром в точке нуль.*

3. ε - *оптимальные решения в параметрических задачах оптимизации.* Пусть $f(x,\theta)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1 и существует производная $f'_x(x,\theta)$, непрерывная относительно x и θ. Рассмотрим теперь м.о. $a_\varepsilon^M(\theta) = \{x \in M / f(x,\theta) \le V(\theta) + \varepsilon\}$, где $V(\theta) = \inf_{x\in M} f(x,\theta)$.

Теорема 5. *Пусть* $M \subset R^n$ - *выпуклый компакт и функцинаольная последовательность* $\{x_j(\theta)\}$ *строится следующими рекуррентными соотношениями:*

$$x_1(\theta) \equiv x_0 \in M; \qquad x_{j+1}(\theta) = \Pi_M\left(x_j(\theta) - \lambda_j f'_x(x_j(\theta),\theta) \right) (j = 1,2,\ldots).$$

где $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j = +\infty$, $\lambda_j > 0$, $\lambda_j \downarrow 0$ *и* $\Pi_M(x)$ - *проекция точки* x *на множество* M.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$, $\rho(x_j(\theta), a^M{}_\varepsilon(\theta)) \to 0$ *при* $j \to \infty$ *равномерно по* $\theta \in E$.

4. Задача о проекции. Пусть M - выпуклый компакт из банахова пространства X и $\theta \in X$. Рассмотрим задачу проецирования:

$$\varphi(x) \equiv \|\theta - x\| \to \min , \qquad x \in M.$$

Пусть $V(\theta) = \min_{x\in M} \|\theta - x\|$. Положим $a(\theta) \equiv \{x \in M / \|\theta - x\| \le V(\theta)\}$.

Теорема 6. *М.о.* $a(\theta)$ *непрерывно.*

5. Приложение к теории игр и к теории дифференциальных включений.

Теорема 7. *Пусть* M - *выпуклый компакт из* R^n *и* $a(x) : M \to 2^{R^m}$ - *непрерывное м.о. с выпуклыми компактными значениями;* $f(x,y)$ - *непрерывная функция, вогнутая относительно* y *при фиксированном* $x \in M$. *Тогда имеет место равенство* $\nu = \inf_{x\in M} \sup_{y\in a(x)} f(x,y) = \sup_{C_N\in\Im} \inf_{x\in M} f(x,C_N(x))$, *где* $\Im$ - *множество всех непрерывных сечений м.о. а.*

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\frac{dx}{dt} \in a(x,\theta) \qquad (1)$$

с начальным условием

$$x(a) = x_0. \qquad (2)$$

Решением этой задачи называется всякая функция $x(t,\theta) : [a,b] \times E \to R^m$, которая непрерывно дифференцируема по t на некотором отрезке [a,b]; для всех $t \in [a,b]$ выполнено соотношение (1) и $x(a,\theta) = x_0$. Множество всех решений задачи (1)-(2) обозначим через $\Im(\theta)$.

Теорема 8. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) м.о. $a(\cdot,\theta) : R^n \to 2^{R^m}$ *удовлетворяет условию Липшица с константой* $L > 0$ *в области* $\Omega \subseteq R^n$ *равномерно относительно* $\theta \in E$, *где* E - *некоторый компакт из* R^p, *т.е.* $a(x_1,\theta) \subseteq a(x_2,\theta) + L\|x_1 - x_2\|B_1(0)$, $\forall x_1,x_2 \in \Omega$, $\forall\theta \in E$;

2) при фиксированом $x \in \Omega$ *м.о.* $a(x,\cdot) : E \to 2^{R^m}$ *непрерывно;*

3) *множества* $a(x,\theta)$ - *выпуклые компакты.*

Тогда м.о. $\Im(\theta)$ *п.н.сн. на* E.

Ереванский государственный университет

Литература

1. *Tyrrel Rockafellar R., Roger J-B.* Wets Variational Analysis. Springer - Verlag. Berlin Heidelberg. 1998. 733 p.

2. *Хачатрян Р. А.* - Изв . НАН Армении. Математика. 2002. 37. N2. С. 65 -76.

3. *Хачатрян А. Р., Хачатрян Р. А.* - Ученые записки ЕГУ. 2003. N2. С. 3-13.

4. *Хачатрян Р. А., Аветисян Р.А., Хачатрян А. Р.* - Изв. НАН Армении. 2003. N1. С. 69-82.

5. *Michael E.* - Ann. Math. 1956. V.63. N2. P. 361-382.

6. *Михалевич В. С., Гупал А. М., Норкин В. И.* Методы невыпуклой оптимизации. М. Наука. 1987. 279 с.

7. *Обен Ж. П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ. М. Мир. 1988. 510 с.

8. *Демьянов В. Ф., Васильев Л. В.* Недифференцируемая оптимизация. М. Наука. 1981. 384 с.

Ա. Ռ. խաչատրյան

Որոշ բազմարժեք արտապատկերումների անընդհատության մասին

Բավականաչափ ընդհանուր պայմանների դեպքում ցույց է տրվում, որ $a_{\varepsilon}(\theta) = \{x \in a(\theta) / f(x,\theta) \leq \inf\limits_{x \in a(\theta)} f(x,\theta) + \varepsilon\}$ բազմարժեք արտապատկերումը հանդիսանում է ուռուցիկ պատկերներով անընդհատ արտապատկերում: Օգտվելով այս փաստից, ստացվել են հետևյալ արդյունքները:

ա) Կառուցվում է անընդհատ անդամներով ֆունկցիոնալ հաջորդականություն, որը ըստ θ պարամետրի հավասարաչափ ձգտում է $a_{\varepsilon}(\theta)$ բազմությանը:

բ) Սահմանվում է Ռիմանի ինտեգրալի գաղափարը բազմարժեք արտապատկերման համար և ցույց տրվում, որ այդ ինտեգրալի փակումը համընկնում է Լեբեգի ինտեգրալի հետ:

գ) Ցույց է տրվում, որ պրոեկտման օպերատորը ուռուցիկ կոմպակտի վրա բանախյան տարածության մեջ հանդիսանում է անընդհատ բազմարժեք արտապատկերում: