УДК 519.65

А. В. Погосян

L_2-сходимость некоторых полиномиально-периодических интерполяций

(Представлено академиком А.Б. Нерсесяном 8/II 2004)

1. Введение. В работах [1,2] рассмотрен обширный класс ортогональных разложений и интерполяций, основанных на некоторой последовательности $\{\theta_n\}_{n}^{\infty} = -\infty$. Разложение по вейвлетам (в частности, сплайн-аппроксимации) соответствует определенному выбору этой последовательности. В работе [3,4] изучена полиномиально-периодическая аппроксимация и исследована L_2-сходимость для различных классов функции $\theta(x)$ при выборе $\theta_n = \theta([n/N])$. В данной работе изучаются интерполяции, соответствующие функциям $\theta(x)$ из других классов.

Ниже используются следующие обозначения: штрих над знаком суммирования ($\sum'$) означает, что нулевой член отсутствует; $[x]$ - целая часть x; $\mathbf{Z}$ -множество целых чисел. Положим также

$$\sum_{n}^{N} \cdot = \sum_{n=-[N/2]}^{-[N/2]+N-1} \cdot, \qquad \sum_{n \neq 0}^{N} \cdot = \sum_{n=-[N/2]}^{-[N/2]+N-1}{}' \cdot,$$

где $N \geq 1$ - целое.

Если $f \in C[a,b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, то через $\omega(\varepsilon, f)$ обозначим модуль непрерывности функции f

$$\omega(\varepsilon, f) = \sup|f(x_1) - f(x_2)|, \;\; x_1,x_2 \in [a,b], \;\; |x_1 - x_2| \leq \varepsilon.$$

Рассмотрим параметрическую интерполяцию [2,3] для $f \in C[-1,1]$

$$I_N(f, \delta) = \sum_{n}^{N} \frac{\check{f}_n}{d\left(\frac{n}{N}\right)} \sum_{s \in Z} \theta\left(\frac{n}{N} + s\right) e^{i\pi(n+sN)x} e^{-i\pi s\delta}, \tag{1}$$

где кусочно-непрерывная функция θ такая, что $\sum_{s \in Z}|\theta(x + s)| < \infty$, $d(x) = \sum_{s \in Z}\theta(x + s) \neq 0$ и

$$\check{f}_n = \frac{1}{N} \sum_{k}^{N} f(x_k) e^{-i\pi n x_k}, \;\; x_k = \frac{2k + \delta}{N}.$$

Здесь $0 \le \delta \le 2$, если N четное и $-1 \le \delta \le 1$, если N–нечетное.

Если аппроксимируемая функция $f \in C^q[-1,1]$ $(q \ge 0)$ не имеет достаточно гладкого 2-периодического продолжения на всю ось $(-\infty,\infty)$, то (см. [7]) возникает проблема ускорения сходимости интерполяции (1). Один из возможных путей решения этой проблемы – использование полиномов Бернулли по следующей схеме [5,6].

Обозначим

$$A_k(f) = f^{(k)}(1) - f^{(k)}(-1), \ \ k = 0,\dots, q \tag{2}$$

и назовем *полиномиально-периодической* интерполяцию

$$I_{q,N}(f,\delta) = I_N\left(f(x) - \sum_{k=0}^{q} A_k(f)\, B_k(x),\delta \right) + \sum_{k=0}^{q} A_k(f)\, B_k(x), \tag{3}$$

где полиномы Бернулли B_k определяются рекуррентными соотношениями

$$B_0(x) = x/2, \ \ B_k(x) = \int B_{k-1}(x)dx, \ \ \int_{-1}^{1} B_k(x)dx = 0, \ \ x \in [-1,1].$$

Наша цель – получение точных асимптотических L_2-констант для интерполяции $I_{q,N}(f,\delta)$.

2. Асимптотические L_2 **-константы.** Пусть $\{f_n\}$, $n = 0,\pm1,\pm2,\dots$ - коэффициенты Фурье функции f

$$f_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)e^{-i\,\pi n\,x}dx.$$

Через $\|\cdot\|$ обозначим норму в пространстве $L_2(-1,1)$, и пусть

$$d(x) = \sum_{s\in \mathbf{Z}} \theta(x+s),\ \alpha(x) = \frac{\sum'_{s\in\mathbf{Z}} \theta(x+s)}{d(x)},$$

$$\beta(x) = \frac{\sum'_{s\in\mathbf{Z}} \left|\theta(x+s)^2\right|}{\left|d(x)\right|^2},\ \gamma(x) = |\alpha(x)|^2 + \beta(x).$$

Доказательство следующих двух лемм можно найти в [2]. Отметим только, что оно основано на очевидном асимптотическом разложении

$$f_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2}\sum_{k=0}^{q}\frac{A_k(f)}{(i\pi n)^{k+1}} + \frac{\varepsilon_n}{2(i\pi n)^{q+2}},\ \ \varepsilon_n = \int_{-1}^{1} f^{(q+2)}(x)e^{-i\pi n\,x}dx,\ \ n \ne 0. \tag{4}$$

Лемма 1. *Пусть* $f \in C^{q+1}[-1,1]$, $f^{(q+2)} \in L_2(-1,1)$, $A_s(f) = 0$, $s = 0,\dots,q+1$, $q \ge 0$. *Тогда*

$$\sum_{r \in Z}{}' f_{n+rN} e^{i\pi r\delta} = o(N^{-q-2}),\ \ N \to \infty,\ \ -[N/2] \le n \le -[N/2] + N - 1. \tag{5}$$

Определение 1. *Скажем, что* $\theta = \theta(x) \in T_q(\mu)$, *если выполнены следующие условия:*
(i) θ *– кусочно непрерывная функция на* R, *для определенности нормированная условием* $\theta(x) = 1/2\,(\theta(x+0) + \theta(x-0))$;
(ii) ряд $\sum_{s \in Z}\theta(x+s)$ *абсолютно сходится на* $[-1/2,1/2]$;
(iii) $\gamma(x)$ *ограничена на* $[-1/2,1/2]$;
(iv) существует монотонная на $(-1/2,0)$, *а также на* $(0,1/2)$, *интегрируемая неотрицательная функция* μ *такая, что*

$$|\alpha(x)|^2 x^{-2q-4} \le \mu(x),\ \ \beta(x)x^{-2q-4} \le \mu(x).$$

Лемма 2. *Пусть* $\theta \in T_q(\mu)$ *и верны условия леммы 1. Тогда*

$$\|f - I_N(f,\delta)\| = o(N^{-q-1.5}),\ \ N \to \infty.$$

На основе этих лемм в [2] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\theta \in T_q(\mu)$, $f \in C^{q+1}[-1,1]$, $f^{(q+2)} \in L_2(-1,1)$, $q \ge 0$, *тогда*

$$N^{2q+3}\|f - I_{q,N}(f,\delta)\|^2 \to$$

$$\frac{|A_{q+1}(f)|^2}{2\pi^{2q+4}} \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{r \in Z} \left| \frac{(-1)^{r\sigma} e^{i\pi r\delta}}{(x+r)^{q+2}} - \frac{\theta(x+r)}{d(x)} \sum_{s \in Z} \frac{(-1)^{s\sigma} e^{i\pi s\delta}}{(x+s)^{q+2}} \right|^2 dx, \tag{6}$$

если $N \to \infty$, *оставаясь четной* $(\sigma = 0)$ *или нечетной* $(\sigma = 1)$.

Изучим теперь интерполяцию $I_{q,N}(f, \delta)$ для двух других классов $\theta(x)$.

Определение 2. *Мы скажем, что* $\theta \in U_q(B,\mu)$, *если выполнены условия (i)-(iii) определения* 1 *и*

(iv) существует константа $0 < B < \infty$ *и монотонная на* $(-1/2,0)$, *а также на* $(0,1/2)$ *и интегрируемая на* $(-1/2,1/2)$ *неотрицательная функция* μ *такая, что*

$$\left| \frac{\gamma(x)x^{-2q-3} - B}{x} \right| \le \mu(x),$$

и

$$\lim_{\varepsilon\to +0} \frac{1}{\ln \varepsilon} \int_{\varepsilon<|x|\le 1/2} \mu(x)dx = 0.$$

Определение 3. *Мы скажем, что* $\theta \in V_{q,p}(C)$, *если выполнены условия (i)-(iii) определения* 1 *и, кроме того, для некоторого* $p < q+1.5$ *существует конечный предел*

$$(iv) \qquad \lim_{x\to 0} \gamma(x)x^{-2p} = C, \;\; 0 < C < \infty.$$

Лемма 3. *Пусть* $\theta \in U_q(B,\mu)$, $q \ge 0$. *Тогда* ($t_n = n/N$)

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\ln N} \sum_{n\ne 0}^{N} \frac{\gamma(t_n)t_n^{-2q-3}}{n} = B.$$

Доказательство. Положим $\eta(x) = \gamma(x)\, x^{-2q-3}$. Имеем

$$\lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{2\ln N} \sum_{n\ne 0}^{N} \frac{\eta(t_n)}{n} - B \right) = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{2\ln N} \sum_{n=1}^{N} \frac{\eta(t_n) - \eta(-t_n) - 2B}{n} \right) \le$$

$$\text{const} \lim_{N\to\infty} \left(\omega\left(\frac{[\sqrt{N}]}{N}, \eta \right) + \frac{1}{2N\ln N} \sum_{[\sqrt{N}]<n} \mu(t_n) \right) \le$$

$$\text{const} \lim_{N\to\infty} \left(\omega\left(\frac{[\sqrt{N}]}{N}, \eta \right) + \frac{1}{\ln N} \int_{[\sqrt{N}]/N < x < 1/2} \mu(x)dx \right) = 0.$$

Теорема 2. *Пусть* $\theta \in U_q(B,\mu)$, $q \ge 0$, $f \in C^{q+1}[-1,1]$, $f^{(q+2)} \in L_2(-1,1)$. *Тогда*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N^{2q+3}}{\ln N} ||f - I_{q,N}(f,\delta)||^2 = \frac{|A_{q+1}(f)|^2}{\pi^{2q+4}} B. \tag{7}$$

Доказательство. Имеем

$$||f - I_{q,N}(f,\delta)|| = ||F - I_N(F,\delta)||,$$

где (согласно разложению (4))

$$F = F_1 + F_2, \tag{8}$$

$$F_1(x) = \sum_{n \in Z}{}' F_{1,n} e^{i\pi n x}, \ F_{1,n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \frac{A_{q+1}(f)}{(i\pi n)^{q+2}}, \ n \neq 0,$$

$$F_2(x) = \sum_{n \in Z}{}' F_{2,n} e^{i\pi n x}, \ F_{2,n} = \frac{1}{2(i\pi n)^{q+2}} \int_{-1}^{1} f^{(q+2)}(x) e^{-i\pi n x} dx, \ n \neq 0.$$

Воспользовавшись неравенством треугольника, из леммы 2 получим

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N^{2q+3}}{\ln N} ||F_2 - I_N(F_2,\delta)||^2 = 0.$$

Легко проверить следующую формулу:

$$||f - I_N(f,\delta)||^2 = 2 \sum_{n}^{N} \sum_{r \in Z} \left| f_{n+rN} e^{i\pi r\delta} - \frac{\theta\left(\frac{n}{N} + r\right)}{d\left(\frac{n}{N}\right)} \sum_{s \in Z} f_{n+sN} e^{i\pi s\delta} \right|^2. \quad (9)$$

Отсюда, с помощью леммы 1, получим

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N^{2q+3}}{\ln N} ||F_1 - I_N(F_1,\delta)||^2 = \frac{|A_{q+1}(f)|^2}{\pi^{2q+4}} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\ln N} \sum_{n}^{N'} \frac{\gamma(t_n)}{t_n^{\ 2q+3}} \frac{1}{n}.$$

Для завершения доказательства достаточно воспользоваться леммой 3.

Заметим, что, в отличие от теоремы 1, в теореме 2 возникает величина ln N, что приводит к меньшей точности, по сравнению с теоремой 1. Кроме того, L_2-константа в теореме 2 уже не зависит от четности N и значения параметра сдвига δ.

Лемма 4. *Пусть функция* λ *определена и ограничена на отрезке* $[-1/2,1/2]$ *и, кроме того, существует конечный предел* $\lim_{t\to 0} \lambda(t) = C$. *Если ряд* $\sum_{n\in Z} u_n$ *абсолютно сходится, то*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n}^{N} u_n \lambda\left(\frac{n}{N}\right) = C \sum_{n \in Z} u_n.$$

Доказательство. Имеем

$$\left| C \sum_{n \in Z} u_n - \sum_{n}{}^{N} u_n \lambda\left(\frac{n}{N}\right) \right| \le \sum_{|n| \le [\sqrt{N}]} \left| C - \lambda\left(\frac{n}{N}\right) \right| |u_n| + \text{const} \sum_{[\sqrt{N}] < |n|} |u_n| \le$$

$$\omega([\sqrt{N}]/N,\lambda) \sum_{n \in Z} |u_n| + \text{const} \sum_{|n| > [\sqrt{N}]} |u_n| = o(1), \ \ N \to \infty.$$

Теорема 3. *Пусть* $f \in C^{q+1}[-1,1]$, $f^{(q+2)} \in L_1[-1,1]$, $q \ge 0$ и $\theta \in V_{q,p}(C)$. *Тогда*

$$\lim_{N\to\infty} N^{2p}||f - I_{q,N}(f,\delta)||^2 = \frac{C}{2\pi^{2q+2}} \sum_{n \in Z}{}' \frac{1}{|n|^{2q+2-2p}} \left| \int_{-1}^{1} f^{(q+1)}(x)e^{-i\pi n x}dx \right|^2 . \qquad (10)$$

Доказательство. Имеем

$$||f(x) - I_{q,N}(f,\delta)|| = ||F(x) - I_N(F,\delta)||, \qquad (11)$$

где, согласно разложению (4),

$$F(x) = \sum_{n \in Z}{}' F_n e^{i\pi n x}, \ \ F_n = \frac{\varepsilon_n}{2(i\pi n)^{q+1}}, \ \ \varepsilon_n = \int_{-1}^{1} f^{(q+1)}(x)e^{-i\pi n x}dx.$$

Воспользовавшись теперь формулой (9), после несложных оценок, получим ($t_n = n/N$)

$$\lim_{N\to\infty} N^{2p}||f - I_{q,N}(f,\delta)||^2 = 2 \lim_{N\to\infty} N^{2p} \sum_{n \ne 0}{}^{N} |F_n|^2 \gamma(t_n) =$$

$$\frac{1}{2\pi^{2q+2}} \lim_{N\to\infty} \sum_{n \ne 0}{}^{N} \frac{\gamma(t_n)}{|t_n|^{2p}} \frac{|\varepsilon_n|^2}{|n|^{2q+2-2p}} .$$

Доказательство завершается применением леммы 4 с $\lambda(t) = \gamma(t)/|t|^{2p}$.

Здесь также, как и в теореме 2, не имеет значения четность N и значение параметра сдвига δ. Качественное отличие этого результата от предыдущих состоит в использовании глобальных свойств функции f (интегралы справа в (10)).

Для того, чтобы разъяснить характер приведенных результатов, рассмотрим следующий простой пример:

$$\theta(x) = \begin{cases} \cos^s \frac{\pi}{2} x, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases} \qquad s > 0. \tag{12}$$

и вычислим функции d, α, β и γ ($x \in [-1/2, 1/2]$)

$$d(x) = \cos^s \frac{\pi}{2} x + \sin^s \frac{\pi}{2} |x|,$$

$$\alpha(x) = \frac{\sin^s \frac{\pi}{2} |x|}{\cos^s \frac{\pi}{2} x + \sin^s \frac{\pi}{2} |x|}, \quad \beta(x) = \frac{\sin^{2s} \frac{\pi}{2} |x|}{(\cos^s \frac{\pi}{2} x + \sin^s \frac{\pi}{2} |x|)^2}, \quad \gamma(x) = 2\alpha^2(x).$$

Таким образом, если $s > q + 1.5$ то $\theta \in \mathbf{T}_q(\mu)$, где $\mu(x) = [\mathrm{const}/(|x|^{2q+4-2s})]$. Поэтому можно применить теорему 1, откуда

$$N^{q+1.5} \| f - I_{q,N}(f,\delta) \| \to |A_{q+1}(f)| \, b(q,\sigma,\delta,s), \; N \to \infty,$$

где

$$b(q,\sigma,\delta,s) = \frac{1}{\pi^{q+2}} \left[\int_0^1 \left| \frac{\alpha(x)}{x^{q+2}} - (1-\alpha(x)) \sum_{r \in Z}{}' \frac{(-1)^{r\sigma} e^{i\pi r \delta}}{(x+r)^{q+2}} \right|^2 dx + \frac{1}{2q+3} \right]^{1/2}.$$

Этот случай детально рассмотрен в [4], где показано, что надлежащим выбором параметра s можно получить более эффективную интерполяцию по сравнению с классической, при которой, как известно,

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1/2, \\ 1/2, & x = \pm 1/2, \\ 0, & |x| > 1/2. \end{cases}$$

Например, в случае $q = 7$ и $s = 11.397712$, $\delta = 1$ интерполяция $I_{q,N}(f,\delta)$ при нечетных N дает в 85 раз более точную интерполяцию.

Заметим, что при $s \le q + 1.5$ функция (12) уже не принадлежит классу $\mathbf{T}_q(\mu)$, так как при $x \to 0$, $|\alpha(x)|^2 x^{-2q-4} \sim x^{-2q-4+2s}$ и условие *(iv)* определения 1 не выполняется. В частности, если $s = q + 1.5$, то $\theta \in \mathbf{U}_q(B,\mu)$, где $B = 2\,(\pi/2)^{2q+3}$, $\mu(x) = \mathrm{const}\,|x|$. Тогда, согласно теореме 2,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N^{q+1.5}}{(\ln N)^{[1/2]}} \|f - I_{q,N}(f,\delta)\| = \frac{|A_{q+1}|}{2^{q+1}\sqrt{\pi}}.$$

В случае же $s < q + 1.5$ невозможно применить и теорему 2, из-за условия *(iv)* определения 2, но выполнены условия теоремы 3 с $p = s$ и

$$\lim_{N\to\infty} N^s\|f - I_{q,N}(f,\delta)\| = \frac{1}{2^s\pi^{q+1-s}} \left(\sum_{n\in Z}{}' \frac{1}{|n|^{2q+2-2s}} \left| \int_{-1}^{1} f^{(q+1)}(x)e^{-i\pi n x}dx \right|^2 \right)^{1/2}.$$

В общем же случае нетрудно убедиться, что классы $T_q(\mu)$, $\theta \in U_q(B,\mu)$, $\theta \in V_{q,p}$ (C) не пересекаются из-за условий *(iv)*.

В заключение заметим, что для определения скачков $A_k(f)$ (см. (2)), в практическом плане, необязательно вычислять непосредственно производные $f(x)$ при $x = \pm1$. Из известного асимптотического разложения (4) следует (см. [5,6]), что скачки $A_k(f)$ можно восстановить с точностью $O(N^{-q+k-2})$, $k = 0, \ldots, q + 1$, $N \to \infty$, решив систему уравнений с матрицей Вандермонда

$$f_{n_s} = \frac{(-1)^{n_s+1}}{2} \sum_{k=0}^{q} \frac{A_k(f)}{(i\pi n_s)^{k+1}}, \quad s = 0, 1, \ldots, q,$$

для $(q + 1)$ различных значений $\{n_s\}$, при const $N \le |n_s| \le N$, $N \to \infty$.

Работа выполнена в рамках проекта ISTC A-823.

Институт математики НАН РА

Литература

1. *Нерсесян А.Б.* - ДНАН Армении. 1998. Т. 98. N 1. С. 23-30.
2. *Nersessian A.B.* - Numer. Functional Anal. and Optimization. 2000. V. 21. N. 1-2.
3. *Нерсесян А.Б., Погосян А.В.* - Изв. НАН Армении. Математика. 2001. Т. 36. N 3. С. 59-77.
4. *Nersessian A.B., Poghosyan A.V.* To be published in Proceedings of ISAAC IV Conference of Complex Analysis, Differential Equations and Related Topics. September 17-21. 2002. Yerevan Armenia.
5. *Eckhoff K.S.* - Math. Comp. 1995. V. 64. N 210. P. 671 - 690.
6. *Eckhoff K.S., Wasberg C.E.* Thesis of Carl Erik Wasberg, Department of Mathematics, University of Bergen, Norway, 1996.
7. *Крылов А.* Лекции по приближенным вычислениям. Л. Изд. АН СССР. 1933.

Ա. Վ. Պողոսյան

Որոշ բազմանդամապարբերական ինտերպոլյացիաների L_2-զուգամիտությունը

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է բազմանդամապարբերական ինտերպոլյացիաների մի ընտանիք, որտեղ $\{\theta_n\}$ հաջորդականությունը հանդես է գալիս պարամետրի դերում: Հետազոտված է այդպիսի ինտերպոլյացիաների L_2-զուգամիտությունը՝ կախված $\theta(x)$ ֆունկցիայի հատկություններից, երբ $\theta_n = \theta(n/N)$: Ստացվել են մոտարկման սխալների ասիմպտոտական տեսակետից ճշգրիտ գնահատականներ: