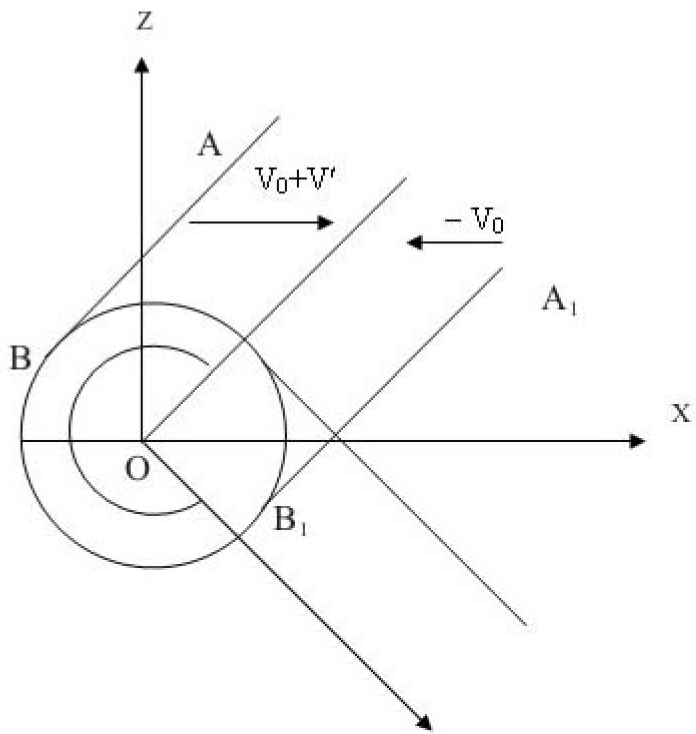
УДК 539.1

Член-корреспондент НАН РА А.Г.Багдоев, Ю.С.Сафарян

Плоская задача соударения упругих двугранных углов

(Представлено 13/I 2003)



Рассматривается линейная задача соударения упругих тел, которые в момент соударения ограничены цилиндрическими поверхностями x = f(|z|). Предполагается, что после соударения имеется полный контакт тел и они состоят из одинакового материала, из чего следует, что после соударения они сливаются и движутся как единое целое. Волновая картина, получающаяся после соударения, зависит от формы тел, в частности, имеющих форму одинаковых клиньев. Эта задача имеет практическое применение в сейсмологии. Начальные условия, соответствующие решению задачи соударения неограниченных по оси y двугранных углов раствора 2 arctg k^{-1} с осью z = 0, т.е. Ox, причем $-V_0$ есть скорость правого тела, $V_0 + V'$ - скорость левого тела до момента соударения, имеют вид [1]

$$u_x = 0, \quad u_z = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial t} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = -V_0\sigma(x - k|z|) + (V_0+V')\sigma(k|z| - x).$$

Здесь $u_{z,x}$ - компоненты перемещения, $\sigma(x)$ - единичная функция.

Введем преобразование по Лапласу по t от функций u_x, u_z, а именно $\bar{u}_x$, $\bar{u}_z$, тогда уравнения теории упругости в изображениях имеют вид:

$$a^2\frac{\partial^2\bar{u}_x}{\partial x^2} + b^2\frac{\partial\bar{u}_x}{\partial z^2} + (a^2 - b^2)\frac{\partial^2\bar{u}_z}{\partial x\partial z} = s^2\,\bar{u}_x + V_0\sigma(x - k|z|) - (V_0 + V')\sigma(k|z| - x),$$

$$b^2\frac{\partial^2\bar{u}_z}{\partial x^2} + a^2\frac{\partial^2\bar{u}_z}{\partial z^2} + (a^2 - b^2)\frac{\partial^2\bar{u}_x}{\partial x\partial z} = s^2\,\bar{u}_z\,, \tag{2}$$

где a, b - скорости продольных и поперечных упругих волн.

Из закона сохранения количества движения в предположении, что массы тел одинаковы, следует, что после слияния они имеют скорость $[(V')/2]$ и все последующие выкладки имеют место в системе координат, движущейся по оси x со скоростью $[(V')/2]$, в которой тела после соударения неподвижны. Далее вводится преобразование Фурье по x, z

$$\bar{u}_{x,z} = \iint_{-\infty}^{\infty}\bar{\bar{u}}_{x,z}\exp\{-s(\alpha x + \gamma z)\}d\,\bar{\alpha}\,d\,\bar{\gamma},\quad \bar{\alpha} = \omega\alpha,\quad \bar{\gamma} = \omega\gamma, \tag{3}$$

где $s = -i\omega$ есть параметр преобразования Лапласа.

Из (2), (3) после обращения преобразования Фурье можно получить:

$$\bar{\bar{u}}_x = \frac{b^2\alpha^2 + a^2\gamma^2 - 1}{(a^2\alpha^2 + b^2\gamma^2 - 1)(b^2\alpha^2 + a^2\gamma^2 - 1) - (a^2 - b^2)^2\alpha^2\gamma^2}\times$$

$$\times\frac{1}{s^2(2\pi)^2}\iint_{-\infty}^{\infty}e^{s(\alpha x'+\gamma z')}\{V_0\sigma(x' - k(|z'|)) - (V_0 + V')\sigma(k(|z'|) - x')\}\,dx'dz', \tag{4}$$

$$\bar{\bar{u}}_z = -\frac{(a^2 - b^2)\alpha\gamma}{b^2\alpha^2 + a^2\gamma^2 - 1}\,\bar{\bar{u}}_x\,.$$

Вычисляя интегралы, получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{s\gamma z'}dz' \int_{k|z'|}^{\infty} e^{s\gamma x'}V_0 dx' - \int_{-\infty}^{\infty} e^{s\gamma z'}(V_0 + V')dz' \int_{-\infty}^{k|z'|} e^{s\alpha x'}dx' =$$

$$= \frac{2V_0 + V'}{-s^2} \frac{k}{\gamma^2 - \alpha^2 k^2}. \tag{5}$$

Поскольку

$$(a^2\alpha^2 + b^2\gamma^2 - 1)(b^2\alpha^2 + a^2\gamma^2 - 1) - (a^2 - b^2)^2\alpha^2\gamma^2 = a^2b^2(\gamma^2 - \gamma_1{}^2)(\gamma^2 - \gamma_2{}^2),$$

$$\gamma_1{}^2 = \frac{1}{a^2} - \alpha^2, \qquad \gamma_2{}^2 = \frac{1}{b^2} - \alpha^2,$$

из (4), (5) можно получить:

$$\bar{\bar{u}}_x = \frac{b^2\alpha^2 + a^2\gamma^2 - 1}{2D}(2V_0 + V')k,$$

$$\bar{\bar{u}}_z = -(2V_0 + V')k(a^2 - b^2)\frac{\alpha\gamma}{2D}, \tag{6}$$

$$D = (\pi abs\omega)^2(\gamma^2 - \alpha^2k^2)(\gamma^2 - \gamma_1{}^2)(\gamma^2 - \gamma_2{}^2).$$

Подставляя (6) в (3) и вычисляя при $z > 0$ вычеты в точках $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_{1,2}$, можно получить:

$$\bar{u}_x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s(\alpha x + \gamma_1 z)} i \frac{\alpha^2}{2s^2(\gamma_1{}^2 - \alpha^2k^2)\gamma_1}(2V_0 + V')kd\alpha +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s(\alpha x + \gamma z)} 2i \frac{\gamma^2}{2\pi a^2 s^2(\gamma_2{}^2 - \alpha^2k^2)}(2V_0 + V')kd\alpha, \tag{7}$$

$$\bar{u}_z = -(2V_0 + V')k\left\{ -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s(\alpha x + \gamma_1 z)} i \frac{\alpha}{2\pi s^2(\gamma_1{}^2 - \alpha^2k^2)}d\alpha + \right.$$

$$
+\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s(\alpha x+\gamma_2 z)} i \frac{\alpha}{2\pi s^2(\gamma_2{}^2-\alpha^2k^2)} d\alpha \Bigg\}, \tag{8}
$$

Переходя к оригиналам, проводя контуры по α в комплексной плоскости через точки Смирнова - Соболева

$$
f_{1,2}(\alpha_{1,2}) = t-\alpha_{1,2}x-\gamma_{1,2}(\alpha_{1,2})z, \qquad f_{1,2}(\alpha_{1,2}) = 0
$$

и вычисляя интегралы от дельта-функций, можно получить

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\partial t} &= -\frac{(2V_0+V')k}{\pi}\,\mathrm{Re}\, i\left\{\frac{\alpha_1{}^3}{\gamma_1(\gamma_1{}^2-\alpha_1{}^2k^2)f'_1(\alpha_1)}+\frac{\gamma_2\alpha_2}{(\gamma_2{}^2-\alpha_2{}^2k^2)f'_2(\alpha_2)}\right\},\\
\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial t} &= \frac{(2V_0+V')k}{\pi}\,\mathrm{Re}\, i\left\{-\frac{\alpha_1{}^2}{(\gamma_1{}^2-\alpha_1{}^2k^2)f'_1(\alpha_1)}+\frac{\alpha_2{}^2}{(\gamma_2{}^2-\alpha_2{}^2k^2)f'_2(\alpha_2)}\right\}.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Определим вначале решение вне точечных волн, позади плоских продольных волн AB: $x = kz - at\sqrt{k^2+1}$, и поперечных плоских волн: $x = kz - bt\sqrt{k^2+1}$, для этого следует вычислить вычеты в (7), (8) в точках $\alpha = -[1/(a\sqrt{1+k^2})]$, $\alpha = -[1/(b\sqrt{1+k^2})]$. Отсюда получим решение вне точечных волн для $x < 0$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u_x}{\partial x} &= -\frac{2V_0+V'}{2\left(1+k^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left\{\frac{1}{a}\sigma\left(t+\frac{x-kz}{a\sqrt{k^2+1}}\right)+k^2\sigma\left(t+\frac{x-kz}{b\sqrt{k^2+1}}\right)\right\},\\
\frac{\partial u_z}{\partial z} &= \frac{(2V_0+V')k^2}{2\left(1+k^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left\{-\frac{1}{a}\sigma\left(t+\frac{x-kz}{a\sqrt{k^2+1}}\right)+\frac{1}{b}\sigma\left(t+\frac{x-kz}{b\sqrt{k^2+1}}\right)\right\},
\end{aligned} \tag{10}
$$

соответствующее решению позади плоских волн для $z > 0$. Точно так же получается решение позади продольных волн A_1B_1: $x = kz + at\sqrt{k^2+1}$, и поперечных волн: $x = kz + bt\sqrt{k^2+1}$. При этом, вычислив вычеты в (7),(8) в точках $\alpha = [1/(a\sqrt{1+k^2})]$, $\alpha = [1/(b\sqrt{1+k^2})]$, получим решение (10) позади идущих вправо плоских волн для $x > 0$ с соответствующей заменой единичных функций. Таким образом, между плоскими волнами AB и A_1B_1

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{2V_0 + V'}{2(1+k^2)^{[3/2]}a}, \qquad \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{(2V_0 + V')k^2}{2(1+k^2)^{[3/2]}a},$$

а между соответствующими поперечными плоскими волнами добавится

$$-\frac{2V_0 + V'}{2(1+k^2)^{[3/2]}a}k^2, \qquad \frac{(2V_0 + V')k^2}{2(1+k^2)^{[3/2]}a}.$$

Теперь найдем $[(\partial u_x)/(\partial x)]$, $[(\partial u_z)/(\partial z)]$ внутри точечных волн. Из (9) с учетом $[(\partial \alpha_{1,2})/(\partial t)] = -[1/(f'_{1,2}(\alpha_{1,2}))]$ получим:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{(2V_0 + V')k}{\pi} \operatorname{Re} i \left\{ \int \frac{\alpha_1^3 d\alpha_1}{\gamma_1(\gamma_1^2 - \alpha_1^2 k^2)} - \int \frac{\gamma_2 \alpha_2 d\alpha_2}{\gamma_2^2 - \alpha_2^2 k^2} \right\},$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{-(2V_0 + V')k}{\pi} \operatorname{Re} i \left\{ -\int \frac{\alpha_1 \gamma_1 d\alpha_1}{\gamma_1^2 - \alpha_1^2 k^2} + \int \frac{\gamma_2 \alpha_2 d\alpha_2}{\gamma_2^2 - \alpha_2^2 k^2} \right\}, \qquad (11)$$

причем

$$\alpha_1 = \frac{tx + iz\sqrt{t^2 - \frac{x^2+z^2}{a^2}}}{x^2+z^2}, \qquad \alpha_2 = \frac{tx + iz\sqrt{t^2 - \frac{x^2+z^2}{b^2}}}{x^2+z^2}. \qquad (12)$$

Вычисляя интегралы, вводя полярные координаты $x = r\cos\varphi$, $z = r\sin\varphi$, отделяя действительные части в (11) и записывая ветвь арктангенса, для которой $\operatorname{arctg}(-x) = \pi - \operatorname{arctg} x$, можно получить решение внутри точечных продольных и поперечных волн при $x < 0$ в виде

$$\frac{\pi}{(2V_0 + V')k} \frac{\partial u_x}{\partial x} = \chi_1 - \chi_2 - \chi_3 - \chi_4,$$

$$\frac{\pi}{(2V_0 + V')k} \frac{\partial u_z}{\partial z} = \chi_1 + \chi_2 - \chi_3 k^2 + \chi_4, \qquad (13)$$

где

$$\chi_1 = \frac{1}{1+k^2}\frac{x\sqrt{t^2-\frac{r^2}{a^2}}}{r^2}, \quad \chi_2 = \frac{1}{1+k^2}\frac{x\sqrt{t^2-\frac{r^2}{b^2}}}{r^2},$$

$$x_3 = \frac{1}{2a\left(1+k^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{t^2-\frac{r^2}{a^2}}}{tz-\frac{r^2\cos\varphi_0}{a}}+\operatorname{arctg}\frac{-x\sqrt{t^2-\frac{r^2}{a^2}}}{tz+\frac{r^2\cos\varphi_0}{a}}\right), \tag{14}$$

$$x_4 = \frac{1}{2b\left(1+k^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{t^2-\frac{r^2}{b^2}}}{tz-\frac{r^2\cos\varphi_0}{b}}+\operatorname{arctg}\frac{-x\sqrt{t^2-\frac{r^2}{b^2}}}{tz+\frac{r^2\cos\varphi_0}{b}}\right),$$

где $\cos\varphi_0 = [k/(\sqrt{1+k^2})]$.

Очевидно, что вне поперечных волн следует полагать $\chi_2 = 0$, $\chi_4 = 0$. Постоянные интегрирования в (13) выбраны так, чтобы на волнах $r = at$, $r = bt$ при $\sin\varphi < \cos\varphi_0$ получить нулевое решение, а при $\sin\varphi > \cos\varphi_0$, поскольку выбрана ветвь $\operatorname{arctg}(-0) = \pi$, получить из (13) решение (10), что завершает аналитическое решение задачи.

Институт механики НАН Армении
Горисский филиал Государственного инженерного университета Армении

Литература

1. *Мартиросян А.Н.* Решение некоторых нестационарных граничных задач теории упругости. Канд. дис. Ереван. 1977. 150 с.

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ա.Գ.Բագդոև, Յու.Ս.Սաֆարյան

Երկնիստ առաձգական անկյունների բախման հարթ խնդիրը

Դիտարկվում է բախման պահին հավասար երկնիստ անկյուններով սահմանափակված առաձգական մարմինների բախման խնդիրը: Խնդիրը լուծվում է ինտեգրալ ձևափոխություն- ների մեթոդով: Լուծումը ստացվում է պարզ անալիտիկ տեսքով: