

УДК 518.9

С. Л. Амбарян, В.С. Амбарян

Об одном множестве точек l-встречи при преследовании с задержкой

(Представлено академиком Ю.Г. Шукуряном 22/VII 2003)

Пусть преследователь P и преследуемый E осуществляют простое преследование (т.е. перемещаются в плоскости с постоянными по модулю скоростями α и β ($\alpha > \beta$) соответственно и имеют возможность в каждый момент времени изменять направление своего движения). В начальный момент времени $t = 0$ игрок P находится в начале координат $P(0) = \{0, 0\}$, а игрок E - в точке с координатами $E(0) = \{a, 0\}$.

Допустим, что игрок E движется прямолинейно начиная с момента времени $t = 0$. Преследуемый E считается пойманным, если расстояние между ним и преследователем P станет меньше или равно l , т. е. $l \geq 0$, $|P(t)E(t)| \leq l$. Игрок P применяет следующую стратегию: он движется прямолинейно по лучу с максимальной скоростью, что гарантирует ему l -встречу за минимальное время. Обозначим эту стратегию через $\bar{u}$.

Геометрическое место точек встречи состоит из точек $M = M(x, y)$, удовлетворяющих условию

$$\frac{|P(0)M| - l}{\alpha} = \frac{|E(0)M|}{\beta}. \quad (1)$$

Уравнение (1) является уравнением плоской алгебраической кривой, называемой овалом Декарта [1].

Теперь рассмотрим следующую задачу. Игрок P до момента времени T не получает никакой информации об игроке E и стоит на месте. С момента времени T игрок P получает информацию о местоположении игрока E и начинает преследование. Игрок P применяет стратегию $\bar{u}$, а игрок E движется прямолинейно. Тогда геометрическое место точек встречи описывается следующим уравнением:

$$\frac{|P(T)M| - l}{\alpha} + T = \frac{|E(0)M|}{\beta}, \quad (2)$$

которое также является овалом Декарта.

Так как игрок P в течение времени T стоит на месте, то за это время игрок E может оказаться в любой точке окружности $A_R(E(0))$ с центром $E(0)$ и радиусом $R = \beta T$. Для каждой точки E_φ

окружности $A_R(E(0))$ геометрическое место точек встречи описывается следующим уравнением:

$$\frac{|P(T)M| - 1}{\alpha} = \frac{|E_\varphi M|}{\beta}, \quad (3)$$

где точка $E_\varphi = E_\varphi(x_{E_\varphi}, y_{E_\varphi})$ имеет координаты:

$$x_{E_\varphi} = a + R \cos \varphi,$$

$$y_{E_\varphi} = R \sin \varphi, \text{ где } 0 \leq \varphi \leq 2\pi \text{ и } R = \beta T.$$

Уравнение (3) определяет семейство овалов Декарта с параметром φ , $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Декартов овал (2), т.е. $[(\sqrt{x^2 + y^2} - 1)/(\alpha)] + T = [(\sqrt{(x - a)^2 + y^2})/(\beta)]$, обозначим через $D_T(l)$, а множество всех точек внутренней части овала, включая его границу, через $S_T(l)$. Семейство декартовых овалов (3), т.е.

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - 1}{\alpha} = \frac{\sqrt{(x - a - R \cos \varphi)^2 + (y - R \sin \varphi)^2}}{\beta}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

обозначим через $D_T(l, \varphi)$.

Имеет место следующая

Теорема. Декартов овал $D_T(l)$ является огибающей для семейства декартовых овалов $D_T(l, \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Доказательство. Преобразуем уравнение (3) следующим образом:

$$\alpha \sqrt{(x - a - R \cos \varphi)^2 + (y - R \sin \varphi)^2} = \beta (\sqrt{x^2 + y^2} - 1),$$

$$F(x, y, \varphi) = \alpha^2 ((x - a - R \cos \varphi)^2 + (y - R \sin \varphi)^2) - \beta^2 (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2 = 0,$$

$$F(x, y, \varphi) = \alpha^2 ((x - a)^2 - 2R(x - a) \cos \varphi + R^2 \cos^2 \varphi) +$$

$$+ (y^2 - 2Ry \sin \varphi + R^2 \sin^2 \varphi) - \beta^2 (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2 = 0,$$

$$F(x,y,\varphi) = \alpha^2((x-a)^2 - 2R((x-a)\cos\varphi + y\sin\varphi)) + y^2 + \\ + R^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) - \beta^2(\sqrt{x^2+y^2} - 1)^2 = 0. \quad (4)$$

Огибающая семейства овалов Декарта должна удовлетворять уравнениям дискриминантной кривой [2]:

$$F(x, y, \varphi) = 0 \quad \text{и} \quad F_{\varphi}(x, y, \varphi) = 0$$

при всевозможных значениях φ , $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Согласно теории об огибающих семейства кривых, дискриминантная кривая кроме огибающей содержит геометрическое место особых точек, которое удовлетворяет уравнениям:

$$F_x(x, y, \varphi) = 0 \quad \text{и} \quad F_y(x, y, \varphi) = 0.$$

Продифференцировав уравнение (4), получим

$$F_x(x,y,\varphi) = 2\alpha^2((x-a) + R\cos\varphi) + \frac{2\beta^2(\sqrt{x^2+y^2}-1) \cdot 2x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

$$F_y(x,y,\varphi) = 2\alpha^2(y - R\sin\varphi) + \frac{2\beta^2(\sqrt{x^2+y^2}-1) \cdot 2y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

$$F_{\varphi}(x,y,\varphi) = 2\alpha^2R((x-a)\sin\varphi - y\cos\varphi) = 0.$$

Откуда следует, что

$$x = a + R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x-a},$$

$$\sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{y}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}.$$

Геометрическое место особых точек представляется уравнением окружности $x^2+y^2=l^2$; из полученного результата следует, что $F_x^2 + F_y^2 \neq 0$.

Исключив φ из (4), получим уравнение огибающей $D_T(l)$ семейства овалов $D_T(l, \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$,

$$F(x,y) = \alpha^2 \left((x-a)^2 - 2R \left(\frac{(x-a)^2}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}} \right) + y^2 + R^2 \right) - \\ - \beta^2 \left(\sqrt{x^2+y^2} - 1 \right)^2 = 0,$$

$$F(x,y) = \alpha^2 \left((x-a)^2 - 2R \sqrt{(x-a)^2+y^2} + y^2 + R^2 \right) - \beta^2 \left(\sqrt{x^2+y^2} - 1 \right)^2 = 0,$$

$$F(x,y) = \alpha^2 \left(\sqrt{(x-a)^2+y^2} - R \right)^2 - \beta^2 \left(\sqrt{x^2+y^2} - 1 \right)^2 = 0,$$

$$\alpha \left(\sqrt{(x-a)^2+y^2} - R \right) = \beta \left(\sqrt{x^2+y^2} - 1 \right),$$

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2} - 1}{\alpha} + \frac{R}{\beta} = \frac{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}{\beta}.$$

Учитывая, что $R = \beta T$, окончательно получаем

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2} - 1}{\alpha} + T = \frac{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}{\beta}. \quad (5)$$

Полученное уравнение (5) совпадает с уравнением (2), откуда следует, что огибающая

семейства овалов Декарта $D_T(l, \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, есть овал Декарта $D_T(l)$.

Теорема доказана.

Отметим, что указанный метод нахождения огибающей для семейства аполлоновых окружностей был использован при решении задачи определения множества точек встречи, когда преследователь P начинает преследование с задержкой в случае точечной поимки [3].

Пусть игрок E использует любую кусочно-постоянную стратегию v [4]. Обозначим через $G_T(P(0), E(0), l)$ множество всевозможных точек встречи, когда P применяет стратегию $\bar{u}$, при различных стратегиях v игрока E . Как известно, при таких стратегиях $(\bar{u}, v)$ множество точек встречи содержится внутри овала Декарта [4].

Таким образом, овал $D_T(l)$ является границей множества $G_T(P(0), E(0), l)$.

Следствие. $G_T(P(0), E(0), l) \cong S_T(l)$.

Ереванский научно-исследовательский
институт математических машин

Литература

1. Савелов А.А. Плоские кривые. М. Физматгиз. 1960. 293 с.
2. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. М. Гостехиздат. 1956. 420 с.
3. Амбарян В.С. - ДАН Армении. 1991. Т. 92. N4. С. 147-153.
4. Петросян Л.А., Томский Г.В. Геометрия простого преследования. Новосибирск. Наука. 1983. 143 с.

Ս.Լ. Համբարյան, Վ.Ս. Համբարյան

Հապաղումով հետապնդման ժամանակ l -հանդիպման կետերի բազմության մասին

Աշխատանքում դիտարկվում է խաղ երկու մասնակիցների՝ P հետապնդողի և E հետապնդվողի միջև, երբ P հետապնդողը սկսում է հետապնդումը T ժամանակ հապաղումով, իսկ E հետապնդվողը շարժվում է ուղղագիծ l -հանդիպման պայմանի ($|PE| \leq l$) դեպքում: Հետազոտվել է խաղի մասնակիցների հանդիպման կետերի բազմության որոշման խնդիրը:

Հայտնի է, որ այդ դեպքում հանդիպման կետերի բազմությունն իրենից ներկայացնում է Դեկարտյան օվալ (նշանակենք $D_T(l)$):

T ժամանակահատվածի ընթացքում E հետապնդվողը կարող է գտնվել $R = \beta T$ շառավղով շրջանագծի ցանկացած E_φ կետում:

P և E_φ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$) կետերի համար կառուցվում է հանդիպման կետերի բազմությունը՝ l -հանդիպման պայմանի դեպքում, որը նույնպես հանդիսանում է Դեկարտյան օվալ (նշանակենք $D_T(l, \varphi)$): Այսպիսով, ստացվում է Դեկարտյան օվալների ընտանիք φ պարամետրով:

Ապացուցված է հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ: Դեկարտյան $D_T(l)$ օվալը հանդիսանում է Դեկարտյան $D_T(l, \varphi)$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$) օվալների ընտանիքի պարուրիչը: