

С.В. Мадоян

Критерии ограниченности и полной ограниченности множеств в пространствах $N \log^\alpha N$

(Представлено академиком В.С.Закаряном 16/VI 2003)

1. Введение. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $C^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) : z_k \in \mathbb{C}; 1 \leq k \leq n\}$. Символом G обозначим как шар $B_n = \{z \in C^n : |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 < 1\}$, так и полидиск $U^n = \{z \in C^n : |z_1| < 1, \dots, |z_n| < 1\}$, символом Γ - границу Шиловой области G , т.е. Γ есть $S_n = \{z \in C^n : |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1\}$ в случае $G = B_n$ и $T^n = \{z \in C^n : |z_1| = 1, \dots, |z_n| = 1\}$ в случае $G = U^n$. На множестве Γ существует вероятностная мера σ , совпадающая с нормированной мерой Лебега на сфере S_n в случае $G = B_n$ и равная прямому произведению нормированных мер Лебега на единичных окружностях, составляющих тор T^n , в случае $G = U^n$.

В [1] для произвольного фиксированного числа $\alpha \geq 1$ и функции $\varphi_\alpha(t) = t \cdot \log^\alpha(e^\alpha + t)$, $t \geq 0$ голоморфная в области G функция $f(z)$ отнесена к классу $N \log^\alpha N$, если

$$|f|_\alpha = \sup_{0 \leq r < 1} \int_{\Gamma} \varphi_\alpha \left(\log(1 + |f(r\gamma)|) \right) \sigma(d\gamma) < +\infty, \quad (1)$$

и установлено, что $N \log^\alpha N$ при каждом $\alpha \geq 1$ образуют (F)-пространства относительно метрики ρ_α ,

$$\rho_\alpha(f, g) = |f - g|_\alpha, \quad f, g \in N \log^\alpha N \quad (2)$$

и поэтому являются линейно-топологическими пространствами в топологии, порожденной метрикой ρ_α (см., например, [2] гл. II, § 1, теорема 12). Отметим, что частный случай $\alpha = 1$ изучался ранее в [3].

В настоящей статье устанавливаются полные характеристики ограниченных и вполне ограниченных множеств в пространствах $N \log^\alpha N$, $\alpha \geq 1$. Близкие исследования в одномерном случае $n = 1$ проведены для пространства Смирнова N^* в [4], а для пространства M - в [5].

В доказательствах результатов этой статьи потребуются следующие свойства функции $\varphi_\alpha(t)$ и метрики ρ_α , установленные в [1]:

- 1) для произвольного $\alpha \geq 1$ и любой функции $f \in N \log^\alpha N$ справедливо соотношение

$$|f|_a = \int_{\Gamma} \varphi_{\alpha} \left(\log(1 + |f^*(\gamma)|) \right) \sigma(d\gamma), \quad (3)$$

где f^* обозначает функцию радиальных граничных пределов f ,

$$f^*(\gamma) = \lim_{r \rightarrow 1} f(r\gamma); \quad \gamma \in \Gamma;$$

2) для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ и произвольной функции $f(z)$ из класса $N \log^{\alpha} N$, $\alpha \geq 1$, справедливы неравенства

$$\min(|\lambda|, 1) |f|_{\alpha} \leq |\lambda f|_{\alpha} \leq \max(|\lambda|, 1) |f|_{\alpha}; \quad (4)$$

3) неравенство

$$\varphi_{\alpha}(\log(1 + xy)) \leq 2^{\alpha+1} \varphi_{\alpha}(\log(1 + x)) + 2^{\alpha+1} \varphi_{\alpha}(\log(1 + y)) \quad (5)$$

справедливо для всех $x \geq 0$ и $y \geq 0$ (и $\alpha \geq 1$).

2. Ограниченные множества в пространствах $N \log^{\alpha} N$, $\alpha \geq 1$. По определению подмножество E линейно-топологического пространства T называют ограниченным, если для любой окрестности V нуля пространства T существует такое число $\lambda_0 > 0$ (зависящее от V , т.е. $\lambda_0 = \lambda_0(V)$), что множество $\lambda E = \{\lambda x; x \in E\}$ содержится в V для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| < \lambda_0$ (см., например, [6], гл. III, § 5, п.1).

Теорема 1. *Множество A в (F) -пространстве $N \log^{\alpha} N$, $\alpha \geq 1$, ограничено тогда и только тогда, когда*

а) A ограничено по метрике ρ_{α} , т.е. существует такая конечная постоянная $K \geq 0$, что $|f|_{\alpha} \leq K$ для всех $f \in A$, и

б) семейство функций $\{\varphi_{\alpha}(\log(1 + |f^*(\gamma)|)); \gamma \in \Gamma\}_{f \in A}$ имеет равномерно абсолютно непрерывные интегралы, т.е. для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, $\delta = \delta(\varepsilon)$, что

$$\int_Y \varphi_{\alpha} \left(\log(1 + |f^*(\gamma)|) \right) \sigma(d\gamma) < \varepsilon$$

для всех измеримых множеств Y на Γ с мерой $\sigma Y < \delta$ и всех функций f из множества A .

Доказательство. Необходимость. Пусть множество A ограничено в линейно-топологическом пространстве $N \log^{\alpha} N$, $\alpha \geq 1$.

Чтобы доказать выполнение условия а) теоремы, рассмотрим в качестве окрестности нуля в определении ограниченности открытый шар $V = \{f \in N \log^{\alpha} N; |f|_{\alpha} < 1\}$ единичного радиуса с центром в нуле. В силу ограниченности множества A для этой окрестности найдется такое положительное число λ_0 , что для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \leq \lambda_0$ справедливо вложение

$\lambda A \subset V$, т.е. $|\lambda f|_\alpha < 1$ для всех $f \in A$. Воспользовавшись неравенствами (4) при $\lambda = \lambda_0 > 0$, имеем $\min(1, \lambda_0)|f|_\alpha \leq |\lambda_0 f|_\alpha < 1$ для всех $f \in A$, откуда $|f|_\alpha < \max(1, \lambda_0^{-1}) = K$ для всех $f \in A$.

Для проверки справедливости условия б) теоремы рассмотрим в качестве окрестностей нуля в пространстве $N\log^\alpha N$, $\alpha \geq 1$, открытые шары $V_\varepsilon = \{f \in N\log^\alpha N; |f|_\alpha < \varepsilon/2^{\alpha+2}\}$ радиуса $\varepsilon/2^{\alpha+2}$ с центром в нуле, где число $\varepsilon > 0$ произвольное. В силу ограниченности множества A существует такое число $\lambda_0 > 0$ (зависящее от ε , $\lambda_0 = \lambda_0(\varepsilon)$), что для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \leq \lambda_0$ выполнено вложение $\lambda A \subset V_\varepsilon$, т.е. $|\lambda f|_\alpha < \varepsilon/2^{\alpha+2}$ для всех $f \in A$. Рассмотрим произвольное измеримое множество Y на Γ . Воспользовавшись указанным выше неравенством (5) и формулой (3), получим оценки

$$\begin{aligned} \int_Y \varphi_\alpha(\log(1 + |f^*(\gamma)|))\sigma(d\gamma) &\leq 2^{\alpha+1} \int_Y \varphi_\alpha(\log(1 + 1/\lambda_0))\sigma(d\gamma) + \\ &+ 2^{\alpha+1} \int_Y \varphi_\alpha(\log(1 + |\lambda_0 f^*(\gamma)|))\sigma(d\gamma) \leq \varphi_\alpha(\log(1 + 1/\lambda_0))\sigma Y + 2^{\alpha+1}|\lambda_0 f|_\alpha < \\ &< 2^{\alpha+1}\varphi_\alpha(1 + 1/\lambda_0)\sigma Y + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

справедливые для всех $f \in A$. Поэтому, если мера

$$\sigma Y < \delta = \frac{\varepsilon}{2^{\alpha+2}\varphi_\alpha(\log(1 + 1/\lambda_0))},$$

то $\int_Y \varphi_\alpha(\log(1 + |f^*(\gamma)|))\sigma(d\gamma) < [(\varepsilon)/2] + [(\varepsilon)/2] = \varepsilon$ для всех $f \in A$, т.е. выполнено условие б) теоремы.

Достаточность. Пусть теперь для множества A (F) -пространства $N\log^\alpha N$, $\alpha \geq 1$, выполнены условия а) и б) теоремы. Так как любая окрестность V нуля метрического пространства $N\log^\alpha N$, $\alpha \geq 1$, содержит некоторый открытый шар V_0 положительного радиуса $\varepsilon_0 > 0$ с центром в нуле, т.е. $V \supset V_0 = \{f \in N\log^\alpha N; |f|_\alpha < \varepsilon_0\}$, то достаточно проверить определение ограниченности множества A для окрестности V_0 нуля в $N\log^\alpha N$, $\alpha \geq 1$.

Согласно условию б) теоремы для $\varepsilon_0 > 0$ существует такое $\delta_0 > 0$, что

$$\int_Y \varphi_\alpha(\log(1 + |f^*(\gamma)|))\sigma(d\gamma) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (6)$$

для любого измеримого на Γ множества Y с мерой $\sigma Y < \delta_0$ и произвольной функции $f \in A$. Согласно условию а) теоремы существует такая конечная постоянная $K \geq 0$, что $|f|_\alpha \leq K$ для всех $f \in A$, так что, по неравенству Чебышева, для множеств $Y_v(f) = \{\gamma \in \Gamma; |f^*(\gamma)| \geq v\}$, $v \in \mathbb{N}$, $f \in A$, справедлива оценка

$$\sigma Y_v(f) \leq \frac{1}{\varphi_\alpha(\log(1+v))} \int_{\Gamma} \varphi_\alpha(\log(1+|f^*(\gamma)|)) \sigma(d\gamma) \leq \frac{K}{\varphi_\alpha(\log(1+v))},$$

в которой использована также формула (3). Следовательно, найдется такое натуральное число v_0 , что все множества $Y_{v_0}(f)$, $f \in A$, имеют меру меньшую δ_0 , и поэтому в неравенстве (6) можно положить $Y = Y_{v_0}(f)$. Тогда для произвольного $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \leq 1$ и любой функции $f \in A$ получим

$$\begin{aligned} |\lambda f|_\alpha &= \int_{\Gamma} \varphi_\alpha(\log(1+|\lambda f^*(\gamma)|)) \sigma(d\gamma) \leq \int_{Y_{v_0}(f)} \varphi_\alpha(\log(1+|f^*(\gamma)|)) \sigma(d\gamma) + \\ &+ \int_{\Gamma \setminus Y_{v_0}(f)} \varphi_\alpha(\log(1+|\lambda| |f^*(\gamma)|)) \sigma(d\gamma) < \frac{\varepsilon_0}{2} + \varphi_\alpha(\log(1+|\lambda| v_0)). \end{aligned}$$

Выбирая $\lambda_0 = \lambda_0(\varepsilon_0) > 0$ таким образом, чтобы были выполнены неравенства $\lambda_0 \leq 1$ и $\varphi_\alpha(\log(1+\lambda_0 v_0)) \leq \varepsilon_0/2$, заключаем, что для любой функции $f \in A$ и любого $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \leq \lambda_0$, выполнено неравенство $|\lambda f|_\alpha < [(\varepsilon_0)/2] + [(\varepsilon_0)/2] = \varepsilon_0$, т.е. $\lambda A \subset V_0 \subset V$ и множество A ограничено в линейно-топологическом пространстве $N \log^\alpha N$, $\alpha \leq 1$.

Укажем стандартный пример ограниченного множества в $N \log^\alpha N$, $\alpha \leq 1$. Рассмотрим произвольную функцию $f \in N \log^\alpha N$ и функцию f_r , $0 \leq r < 1$, определяемые формулой $f_r(z) = f(rz)$, $z \in G$. Тогда множество $\{f_r\}_{0 \leq r < 1}$ ограничено в $N \log^\alpha N$, поскольку условие а) теоремы 1 выполнено в силу принадлежности функции f классу $N \log^\alpha N$ (см. формулу (1)), а условие б) есть не что иное, как пункт б) утверждения 1 статьи [1].

3. Вполне ограниченные множества в пространствах $N \log^\alpha N$, $\alpha \geq 1$. Понятие полной ограниченности множества можно трактовать разными способами (см. [2-7]). Однако в полных метрических пространствах (а пространство $N \log^\alpha N$, $\alpha \leq 1$, таковым в метрике ρ_α является на основании результатов статьи [1]) свойство полной ограниченности множества равносильно свойству его относительной компактности, т.е. тому, что из любой

последовательности элементов множества можно выделить сходящуюся подпоследовательность (см. например [6], гл. II, §7, теорема 3).

Теорема 2. Множество $B \subset N \log^\alpha N$, $\alpha \geq 1$, вполне ограничено в пространстве $N \log^\alpha N$ тогда и только тогда, когда

а) B ограничено в $N \log^\alpha N$ (как в линейно-топологическом пространстве), и

б) семейство функции $\{f^*(\gamma); \gamma \in \Gamma\}_{f \in B}$ относительно компактно в топологии сходимости по мере σ на Γ .

Доказательство. Необходимость. Пусть множество B вполне ограничено в линейно-топологическом пространстве $N \log^\alpha N$, $\alpha \geq 1$. Поскольку утверждение об ограниченности вполне ограниченных множеств является общим результатом теории линейно-топологических пространств (см. например [8], гл. 2, § 7, п. 5), то условие а) теоремы выполнено.

Для проверки выполнения условия б) теоремы рассмотрим произвольную последовательность (g_v) функции семейства $\{f^*(\gamma); \gamma \in \Gamma\}_{f \in B}$. Тогда, по определению этого

семейства, существует такая последовательность функций (f_v) в множестве B , что $f_v^* = g_v$ почти всюду на Γ для каждого $v \in N$. Вполне ограниченное множество B относительно компактно в $N \log^\alpha N$, и, следовательно, из последовательности (f_v) можно выделить подпоследовательность (f_{v_k}) , $v_{k+1} > v_k$, $k \in N$, сходящуюся к некоторой функции $f \in N \log^\alpha N$ по метрике ρ_α . Согласно неравенству Чебышева и формуле для $|f|_\alpha$ в свойстве 1)

$$\sigma\{\gamma \in \Gamma; |f_{v_k}^*(\gamma) - f_{v_l}^*(\gamma)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{|f_{v_k} - f_{v_l}|}{\varphi_\alpha(\log(1 + \varepsilon))} \rightarrow 0 \text{ при } k, l \rightarrow \infty$$

при каждом фиксированном $\varepsilon > 0$, т.е. подпоследовательность $(g_{v_k}) = (f_{v_k}^*)$ фундаментальна по мере σ . Таким образом, из любой последовательности функций семейства $\{f^*(\gamma); \gamma \in \Gamma\}_{f \in B}$ можно выделить фундаментальную по мере σ подпоследовательность, и, так как метрика сходимости по мере σ полна, то семейство $\{f^*(\gamma); \gamma \in \Gamma\}_{f \in B}$ относительно компактно и свойство б) установлено.

Достаточность. Пусть множество B пространства $N \log^\alpha N$ удовлетворяет условиям а) и б) теоремы; рассмотрим произвольную последовательность (f_v) функции $f_v \in B$, $v \in N$. Так как измеримые на Γ функции f_v , $v \in N$, содержатся в семействе $\{f^*(\gamma); \gamma \in \Gamma\}_{f \in B}$, то согласно

условию б) существует подпоследовательность $f_{v_k}^*$, сходящаяся по мере σ к некоторой измеримой на Γ функции g . По теореме Ф. Рисса, в $(f_{v_k}^*)$ существует подпоследовательность $(f_{v_{kl}}^*)$, сходящаяся к g почти всюду на Γ . Обозначим $f_{v_{kl}}^* = f_m^*$, $l \in N$; $m \in N$. Согласно

условию а) доказываемой теоремы и условию а) теоремы 1 существует такая конечная постоянная $K \geq 0$, что

$$\int_{\Gamma} \varphi_{\alpha}(\log(1 + |f_m^*(\gamma)|)) \sigma(d\gamma) \leq K$$

для всех $m \in \mathbb{N}$, переходя к пределу при $m \rightarrow +\infty$, с учетом леммы Фату - Лебега получим

$$\int_{\Gamma} \varphi_{\alpha}(\log(1 + |g(\gamma)|)) \sigma(d\gamma) \leq K,$$

т.е. функция $\varphi_{\alpha}(\log(1+|g|))$ интегрируема по σ на Γ . В силу условия б) теоремы 1 последовательность $\{\varphi_{\alpha}(\log(1+|f_m^*|))\}$ имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы, что вместе с уже доказанным свойством интегрируемости функции $\varphi_{\alpha}(\log(1+|g|))$ влечет равностепенную абсолютную непрерывность интегралов последовательности $\{\varphi_{\alpha}(\log(1+|f_m^* - g|))\}$, поскольку согласно элементарному неравенству

$$\varphi_{\alpha}(\log(1 + |x - y|)) \leq \varphi_{\alpha}(\log(1 + |x|)) + \varphi_{\alpha}(\log(1 + |y|)) \quad (7)$$

(см.[1]) выполнено

$$\varphi_{\alpha}(\log(1 + |f_m^* - g|)) \leq \varphi_{\alpha}(\log(1 + |f_m^*|)) + \varphi_{\alpha}(\log(1 + |g|)).$$

Поэтому для последовательности $\{\varphi_{\alpha}(\log(1 + |f_m^* - g|))\}$ выполнены все условия общей предельной теоремы (см. [6], с. 28), на основании которой заключаем, что

$$\int_{\Gamma} \varphi_{\alpha}(\log(1 + |f_m^*(\gamma) - g(\gamma)|)) \sigma(d\gamma) \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow +\infty,$$

и, применяя неравенство (7), получим, что

$$|f_m - f_p|_{\alpha} = \int_{\Gamma} \varphi_{\alpha}(\log(1 + |f_m^*(\gamma) - f_p^*|)) \sigma(d\gamma) \rightarrow 0$$

при $m, p \rightarrow +\infty$, т.е. что подпоследовательность $(f_m) = (f_{V_{kl}})$ фундаментальна. Итак, любая последовательность функций множества B содержит фундаментальную подпоследовательность и множество B вполне ограничено в пространстве $N \log^{\alpha} N$, $\alpha \geq 1$.

Рассмотренное в предыдущем пункте ограниченное в пространстве $N\log^\alpha N$, $\alpha \geq 1$, множество $\{f_r\}_{0 \leq r < 1}$, порожденное произвольной функцией $f \in N\log^\alpha N$, $\alpha \geq 1$, по формуле $f_r(z) = f(rz)$, $z \in G$, $0 \leq r < 1$, предоставляет также пример вполне ограниченного множества в $N\log^\alpha N$, $\alpha \geq 1$. Действительно, справедливость условия а) теоремы 2 для множества $\{f_r\}_{0 \leq r < 1}$ доказана в предыдущем пункте. Чтобы проверить выполнение условия б) теоремы 2, рассмотрим произвольную последовательность $\{f_{r_k}^*\}$, $0 \leq r_k < 1$, $k \in \mathbb{N}$ и заметим, что $f_{r_k}^*(\gamma) = f(r_k \gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, $k \in \mathbb{N}$. Если последовательность r_k имеет предельную точку внутри промежутка $[0,1)$, скажем r_0 , $0 \leq r_0 < 1$, то в силу равномерной непрерывности функции f на компактах внутри G последовательность (f_{r_k}) сходится на Γ к функции f_{r_0} равномерно, и следовательно, и по мере σ . Если же $r_k \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$, то (f_{r_k}) сходится к f^* почти всюду на Γ , а значит, и по мере σ . Таким образом, в обоих случаях множество $\{f_r\}_{0 \leq r < 1}$ удовлетворяет условию б) теоремы 2 и поэтому вполне ограничено в $N\log^\alpha N$, $\alpha \geq 1$.

Государственный инженерный университет Армении

Литература

1. Մադրյան Ս.Վ. - Մաթեմատիկան բարձրագույն դպրոցում, 2003, N4, էջ 21-28.
2. Dunford N., Schwartz J. T. Linear Operators. Part I. General Theory. Interscience Publishers. New York. 1958. (Рус. пер. Н. Данфорд, Дж. Шварц. Линейные операторы. Общая теория. М. ИЛ. 1962. 896 с.)
3. Гаврилов В.И., Субботин А.В. - Матер. конф.: Вопр. функц. анализа и мат. физики. Баку. Чашыоглу. 1999. С. 240-251.
4. Yanagahara N. - Sci. Papers College Gen. Ed. Univ. Tokyo. 1973. V. 23.
5. Hong Oh Kim. - Can. J. Math. 1988. V. 40. N 3. P. 718-741.
6. Колмогоров А.Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М. Наука. 1981. С. 544.
7. Meyer P.A. Probability and potentials. Blaisdell publishing company. English translated. Waltham. Massachusetts-Toronto-London. 1965. (Рус. пер. П.А. Мейер. Вероятность и потенциалы. М. Мир. 1973. 328 с.).
8. Kelley J.L., Namioka I. et al Linear Topological spaces. D. Van Nostrand Company. Inc. Princeton. New Jersey-Toronto-New York-London. 1963.

Ս.Վ. Մադոյան

Բազմությունների սահմանափակության և լիովին սահմանափակության
հայտանիշները $N \log^\alpha N$ տարածություններում

Հոդվածում ապացուցվում են $N \log^\alpha N$ տարածություններին պատկանող ֆունկցիաների
բազմության սահմանափակության և լիովին սահմանափակության անհրաժեշտ և բավարար
պայմանները: