УДК 539.3

Академик Л. А. Агаловян, М. Л. Агаловян

К определению частот и форм собственных колебаний ортотропной полосы

(Представлено 14/III 2003)

Рассматривается вопрос определения частот и форм собственных колебаний ортотропной полосы-балки при различных, отличных от классических, условиях на продольных краях. Установлена асимптотика компонентов тензора напряжений и вектора перемещения, выведены характеристические уравнения для определения значений собственных частот с заданной асимптотической точностью. Определены собственные функции.

1. Ставится задача: найти ненулевые решения уравнений динамики теории упругости для ортотропной полосы $D = \{(x,y): x \in [0,l], |y| \le h, h << l\}$ при двух типах граничных условий на продольных краях $y = \pm h$ полосы:

$$u_x(x, \pm h, t), \quad u_y(x, \pm h, t) = 0, \tag{1.1}$$

$$\sigma_{xy}(x, h, t) = \sigma_{yy}(x, h, t)=0, \quad u_x(x, -h, t) = u_y(x, -h, t) = 0. \tag{1.2}$$

В указанном классе задач условиям при $x = 0,l$ соответствуют собственные колебания в зоне пограничного слоя [1], поэтому мы их здесь не рассматриваем. Решение сформулированной задачи ищем в виде

$$\sigma_{xx},\sigma_{xy}, \sigma_{yy} = (\sigma_{11}(x,y), \sigma_{12}(x,y), \sigma_{22}(x,y))\exp(i\omega t),$$

$$u_x,u_y = (\overline{u_x}(x,y), \overline{u_y}(x,y))\exp(i\omega t). \tag{1.3}$$

Вводя затем безразмерные переменные $\xi = x/l, \zeta = y/h$ и компоненты вектора перемещения $u = \overline{u_x}/l$, $v = \overline{u_y}/l$, решение задачи сводится к решению сингулярно возмущенной малым параметром $\varepsilon = h/l$ системы

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\xi} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\zeta} + \varepsilon^{-2}\omega_*^2 u = 0,$$

$$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\xi} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\zeta} + \varepsilon^{-2}\omega_*^2 v = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = a_{11}\sigma_{11} + a_{12}\sigma_{22}, \quad \varepsilon^{-1}\frac{\partial v}{\partial \zeta} = a_{12}\sigma_{11} + a_{22}\sigma_{22}, \tag{1.4}$$

$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} = a_{66}\sigma_{12}, \quad \omega_*^{\,2} = \rho h^2\omega^2,$$

где ω - искомая частота собственных колебаний, a_{ik} - постоянные упругости, ρ - плотность.

Решение системы (1.4) представим в виде [2]

$$\sigma_y = \varepsilon^{-1+s}\sigma_y^{(s)}, \quad u,v = \varepsilon^s(U^{(s)},V^{(s)}) \quad s = \overline{0,N},$$

$$\omega_*^{\,2} = \varepsilon^k\omega_{*k}^2, \quad k = \overline{0,N}. \tag{1.5}$$

Подставив (1.5) в (1.4), применив правило Коши умножения рядов, для определения неизвестных коэффициентов $\sigma_{ik}^{(s)}$, $U^{(s)}$, $V^{(s)}$, ω_{*k}^2 получим рекуррентную систему

$$\frac{\partial \sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}^{(s)}}{\partial \zeta} + \omega_{*k}^2 U^{(s-k)} = 0, \quad k = \overline{0,s},$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}^{(s)}}{\partial \zeta} + \omega_{*k}^2 V^{(s-k)} = 0,$$

$$\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} = a_{11}\sigma_{11}^{(s)} + a_{12}\sigma_{22}^{(s)}, \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} = a_{12}\sigma_{11}^{(s)} + a_{22}\sigma_{22}^{(s)},$$

$$\frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi} = a_{66}\sigma_{12}^{(s)}, \quad Q^{(m)} \equiv 0, \ m < 0,$$

где $k = \overline{0,s}$ всегда означает, что по немому (повторяющемуся) индексу "k" происходит суммирование в пределах 0,s. Из системы (1.6) следуют

$$\sigma_{12}^{(s)} = \frac{1}{a_{66}}\left[\frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi}\right], \quad \sigma_{11}^{(s)} = \frac{1}{\Delta}\left[-a_{12}\frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} + a_{22}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi}\right],$$

$$\sigma_{22}^{(s)} = \frac{1}{\Delta}\left[a_{11}\frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} - a_{12}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} \right], \quad \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2, \tag{1.7}$$

функции $U^{(s)}$, $V^{(s)}$ определяются из уравнений

$$\frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{66}\,\omega_{*k}^2 U^{(s-k)} = f_u^{(s)}, \quad k = \overline{0,s},$$
$$f_u^{(s)} = -a_{66}\frac{\partial\, \sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 V^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta}, \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial^2 V^{(s)}}{\partial \zeta^2} + A_{11}\,\omega_{*k}^2 V^{(s-k)} = f_v^{(s)},$$
$$f_v^{(s)} = -A_{11}\frac{\partial\, \sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{a_{12}}{a_{11}}\frac{\partial^2 U^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta}, \quad A_{11} = \Delta/a_{11}. \tag{1.9}$$

При $s = 0$ уравнения (1.8), (1,9) однородны и независимы. Решив их, определив по формулам (1.7) остальные искомые величины и удовлетворив условиям (1.1) или (1.2), получим характеристические уравнения для определения главных значений частот собственных колебаний. Затем определяются соответствующие им собственные функции. Условиям $u_x(\pm h) = 0$ соответствуют следующие характеристические уравнения и главные значения частот:

$$\text{а) } \cos\sqrt{a_{66}}\,\omega_{*0} = 0, \quad \omega_{*0_n}^1 = \frac{\pi}{2\sqrt{a_{66}}}(2n+1), \quad n \in N \tag{1.10}$$

(симметричная задача),

$$\text{б) } \sin\sqrt{a_{66}}\,\omega_{*0} = 0, \quad \omega_{*0_n}^1 = \frac{\pi n}{\sqrt{a_{66}}}, \quad n \in N \quad \text{(задача изгиба)}, \tag{1.11}$$

Собственными функциями являются соответственно

$$\psi_n^{\,I}(\zeta) = \cos\frac{\pi}{2}(2n+1)\zeta, \quad \varphi_n^{\,I}(\zeta) = \sin\pi n\zeta. \tag{1.12}$$

Легко убедиться, что они составляют ортонормированную систему

$$\int_{-1}^{+1} \psi_n^{I}(\zeta)\psi_m^{I}(\zeta)\partial\zeta = \delta_{mn}, \quad \int_{-1}^{+1} \varphi_n^{I}(\zeta)\varphi_m^{I}(\zeta)\partial\zeta = \delta_{mn}. \tag{1.13}$$

Имеем

$$\text{а)}\quad U_{nI}^{(0)} = C_{1n}^{(0)}(\xi)\psi_n^{I}(\zeta), \quad \text{б)}\quad U_{nI}^{(0)} = C_{2n}^{(0)}(\xi)\psi_n^{I}(\zeta). \tag{1.14}$$

Частотам (1.10), (1.11) соответствуют сдвиговые собственные колебания. Условиям $u_y(\pm h) = 0$ соответствуют

$$\text{а)}\ \sin\omega_* \sqrt{A_{11}} = 0, \quad \omega_{*0}^{II} = \frac{\pi n}{\sqrt{A_{11}}}, \quad n \in N, \quad \text{(симетричная задача)} \tag{1.15}$$

$$\text{б)}\ \cos\omega_* \sqrt{A_{11}} = 0, \quad \omega_{*0_n}^{II} = \frac{\pi(2n+1)}{2\sqrt{A_{11}}}, \quad n \in N \quad \text{(задача изгиба),} \tag{1.16}$$

Собственными функциями являются функции (1.12). Имеем

$$\text{а)}\quad V_{nII}^{(0)} = C_{3n}^{(0)}(\xi)\psi_n^{I}(\zeta), \quad \text{б)}\ V_{nII}^{(0)} = C_{4n}^{(0)}(\xi)\psi_n^{I}(\zeta). \tag{1.17}$$

Собственные колебания являются продольными.

Граничным условиям (1.2) соответствуют следующие главные значения частот сдвиговых и продольных колебаний и соответствующие им собственные функции, которые также составляют ортонормированную систему:

$$\omega_{*0_n}^{I} = \frac{\pi}{4\sqrt{a_{66}}}(2n+1), \quad \omega_{*0_n}^{II} = \frac{\pi}{4\sqrt{A_{11}}}(2n+1), \quad n \in N, \tag{1.18}$$

$$\psi_n^{I,\,II} = \sin\frac{\pi}{4}(2n+1)(1+\zeta). \tag{1.19}$$

2. При $s > 0$ необходимо найти решения уравнений (1.8), (1.9) для двух независимых случаев: а)$\omega_{*k} = \omega_{*k}^{I}$, б) $\omega_{*k} = \omega_{*k}^{II}$, которым будут соответствовать решения $Q_I^{(s)}$, $Q_{II}^{(s)}$. В частности,

$$U_I^{(0)} \neq 0, \quad \sigma_{12I}^{(0)} \neq 0, \quad V_I^{(0)} = 0, \quad \sigma_{11I}^{(0)} = \sigma_{22I}^{(0)} = 0,$$

$$U_{ll}^{(0)} = 0, \quad \sigma_{12ll}^{(0)} = 0, \quad V_{ll}^{(0)} \neq 0, \quad \sigma_{11ll}^{(0)} \neq 0, \quad \sigma_{22ll}^{(0)} \neq 0. \tag{2.1}$$

При s = 1 и $\omega_{*0} = \omega_{*0_n}^{1}$ уравнение (1.8) принимает вид

$$\frac{\partial^2 U_{nl}^{(1)}}{\partial \zeta^2} + a_{66}(\omega_{*0n}^{1})^2 U_{nl}^{(1)} + a_{66}\,\omega_{*ln}^{2}\, U_{nl}^{(0)} = f_{ul}^{(1)}, \quad f_{ul}^{(1)} = -a_{66}\frac{\partial \sigma_{111}^{(0)}}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 V_I^{(0)}}{\partial \xi \partial \zeta}. \tag{2.2}$$

В уравнении (2.2) неизвестными являются функция $U_{nl}^{(1)}$ и поправка к частоте ω_{*ln}^{2}. Для их определения применим следующий прием решения подобных уравнений [3,4]. Решение будем искать в виде ряда по системе функций $\{\psi_n^{\,I}\}$:

$$U_{nl}^{(1)} = a_{mn}^{(1)}(\xi)\psi_m^{(I)}(\zeta), \quad m = \overline{0, N}. \tag{2.3}$$

При таком представлении решения граничные условия (1.1) удовлетворяются тождественно. Представив $f_{ul}^{(1)}$ в виде ряда по функциям $\{\psi_n^{\,I}\}$, затем умножив обе части уравнения (2.2) на $\psi_k^{\,I}(\zeta)$ и используя свойство (1.13), получим

$$a_{kn}^{(1)} = \frac{R_{nk}^{(1)}}{a_{66}[(\omega_{*0n}^{1})^2 - (\omega_{*0k}^{1})^2]}\ (k \neq n),$$

$$\omega_{*ln}^{2} = \frac{1}{a_{66}} R_{nn}^{(1)}, \quad R_{nm}^{(1)} = \int_{-1}^{+1} f_{ul}^{(1)}\ \psi_m^{\,I}(\zeta)d\zeta, \tag{2.4}$$

a_{nn} определяется из условия нормировки [3,4]:

$$\int_{-1}^{+1} (U_{nl}^{(0)} + \varepsilon\, U_{nl}^{(1)})^2 d\zeta = 1. \tag{2.5}$$

Согласно (1.8), (2.1) $f_{ul}^{(1)} = 0$, следовательно

$$a_{kn}^{(1)} = 0, \quad a_{nn}^{(1)} = 0, \quad \omega_{*ln}^{1} = 0. \tag{2.6}$$

При s=2 повторяется та же процедура. В результате имеем

$$a_{kn}^{(2)} = \frac{R_{nk}^{(2)}}{a_{66}[(\omega_{*0n}^{1})^2 - (\omega_{*0k}^{1})^2]} \quad (k \neq n), \tag{2.7}$$

$$a_{nn}^{(2)} = 0, \quad \omega_{*2n}^{2} = \frac{1}{a_{66}} R_{nn}^{(2)}.$$

где

$$R_{nk}^{(2)} = \int_{-1}^{+1} f_{ul}^{(2)} \psi_k(\zeta) d\zeta,$$

$$f_{ul}^{(2)} = -a_{66} \frac{\partial \sigma_{111}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 V_I^{(1)}}{\partial \xi \partial \zeta}, \tag{2.8}$$

а $V_I^{(1)}$ однозначно определяется из неоднородного уравнения (1.9) при $\omega_{*0} = \omega_{*0I}$ и граничных условий (1.1), $\sigma_{111}^{(1)}$ вычисляется по формуле (1.7). Эту процедуру можно продолжить и при s > 2, однако в практических приложениях бывает достаточным ограничиться приближениями s = 0,1,2. В нашем случае имеем

$$\omega_{*0n}^{2} = (\omega_{*0n}^{1})^2 + \varepsilon^2 \omega_{*2n}^{2},$$

$$U_{nI} = U_{nl}^{(0)} + \varepsilon^2 U_{nl}^{(2)}, \quad V_{nI} = \varepsilon V_{nl}^{(1)}, \tag{2.9}$$

т.е. сдвиговые собственные колебания будут возбуждать продольные колебания с той же частотой, но малой амплитудой и наоборот. Данные для задачи изгиба можно получить из вышеприведенных формальной заменой функций $\psi_k(\zeta)$ на $\varphi_k(\zeta)$. Изложенную процедуру можно повторить для случая $\omega_{*n} = \omega_{*0n}^{ll}$. Здесь главенствующую роль будет играть уравнение (1.9). Поправка к частоте будет порядка $O(\varepsilon^2)$, продольные же колебания будут возбуждать собственные сдвиговые колебания малой амплитуды.

Подобным образом осуществляется процесс определения решения при граничных условиях (1.2).

Институт механики НАН РА

Литература

1. *Агаловян М. Л.* В кн.: Современные вопросы оптимального управления и устойчивости систем. Ереван. Изд.-во ЕГУ. 1997. С. 132-135.
2. *Агаловян Л. А.*- Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М. Наука. 1997. 414 с.
3. *Найфе А. Х.*- Методы возмущений. М. Мир. 1976. 455 с.
4. *Ломов С. А.*- Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М. Наука. 1981. 398 с.

Ակադեմիկոս Լ. Ա. Աղալովյան, Մ. Լ. Աղալովյան

Օրթոտրոպ շերտի սեփական տատանումների հաճախականությունների և տատանման ձևերի որոշման վերաբերյալ

Դիտարկվում են օրթոտրոպ շերտ-հեծանի սեփական տատանումների հաճախականությունների արժեքների և տատանման ձևերի որոշման հարցերը, երբ շերտի երկայնական նիստերի վրա դրված են ոչ դասական եզրային պայմաններ՝ համասեռ պայմաններ տեղափոխման վեկտորի բաղադրիչների նկատմամբ կամ խառը եզրային պայմաններ: Որոշված են լարումների թենզորի և տեղափոխման վեկտորի բաղադրիչների ասիմպտոտիկական կարգերը, արտածված են սեփական տատանումների հաճախականությունների որոշման բնութագրիչ հավասարումները: Որոշված են տատանման ձևերը բնութագրող սեփական ֆունկցիաները: